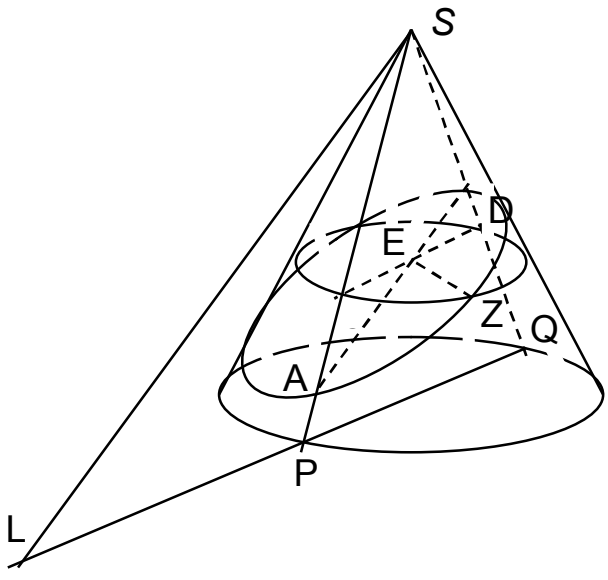
Майер Р.А., Майер Р.Р.

История математики

Курс лекций

Часть 2



Красноярск 2006

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Красноярский государственный педагогический университет им. А. П. Астафьева»

Майер Р.А., Майер Р.Р.

История математики

Курс лекций
Часть 2

Красноярск 2006

ББК 22.1 г
М 14

Печатается по решению редакционно–издательского совета Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
М.В. Носков

Кандидат физико-математических наук, профессор
С.А. Анищенко

М 14
Майер Р.А., Майер Р.Р. История математики: Курс лекций. Часть 2. – Красноярск: РИО ГОУ ВПО КГПУ им. В. П. Астафьева, 2006. – 144 с.

Вторая часть учебного пособия посвящена истории математики XVII–XIX веков. Изложение ведется по историческим периодам. Материал распределен по семи лекциям. Содержание каждой лекции избыточно, определенная её часть может быть использована в качестве материала для организации самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено студентам математических факультетов педагогических вузов, учителям математики и школьникам старших классов школ с математическим уклоном.

ISBN 5–85981–129-2

ББК 22.1г
© Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2006
© Майер Р.А., Майер Р.Р., 2006

Содержание

Лекция 11. Развитие инфинитезимальных методов в первой половине XVII века 5

Характеристика эпохи. Иоганн Кеплер и его астрономические работы. Математические работы Кеплера. Метод неделимых Кавальери

Лекция 12. «Универсальная математика» Декарта 22

Рене Декарт – философ и математик. «Геометрия» Декарта. Пьер Ферма и его аналитическая геометрия. Влияние «Геометрии» на дальнейшее развитие математики. Задачи на квадратуры и касательные

Лекция 13. Создание дифференциального и интегрального исчисления 42

Исчисление флюксий И. Ньютона. Дифференциальное и интегральное исчисление Г. Лейбница. Другие разделы математики, разрабатывавшиеся в XVII веке.

Лекция 14. Математика первой половины XVIII века 63

Характеристика эпохи. Английская и континентальная школы математического анализа начала XVIII века. Представители английской школы анализа первой половины XVIII века. Представители континентальной школы анализа первой половины XVIII века. Леонард Эйлер и его математическое творчество. Леонард Эйлер и обоснование анализа.

Лекция 15. Математика второй половины XVIII века, французская математическая школа 82

Особенности развития математики во второй половине XVIII века. Математическое творчество Алексиса Клода Клеро. Жан ле Рон Даламбер и его математическое творчество. Математическое творчество Жозефа Луи Лагранжа. Математическое творчество Пьера Симона Лапласа. Математическое творчество и общественная деятельность Гаспара Монжа. Фурье Жан Батист Жозеф. «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых» Лазара Карно.

Лекция 16. Математика первой половины XIX века 101

Общая характеристика эпохи Гаусс и его математическое творчество. Аналитико-алгебраические исследования (Коши, Абель, Галуа, Дирихле,

Якоби). Геометрия первой половины XIX века (Понселе, Штейнер, Штаудт, Мёбиус, Плюккер, Шаль). Открытие неевклидовой геометрии. (Лобачевский, Больяй)

Лекция 17. Математика второй половины XIX века 120

Общая характеристика математики второй половины XIX века. Риман Бернхард. Аналитико-алгебраические исследования. Арифметизация математического анализа. (Вейерштрасс, Кронекер, Дедекинд, Кантор). Французская математическая школа (Лиувилль, Эрмит, Дарбу). Возрождение английской математической школы (Грин, Гамильтон, Кэли, Сильвестр). Российская математическая школа (Остроградский, Чебышев, Ковалевская). Математика последней четверти XIX века. Объединяющие идеи (Клейн, Софус Ли, Анри Пуанкаре). Математика на рубеже XIX и XX веков. Двадцать три проблемы Гильберта.

Именной указатель..... 140

Список литературы 142

Лекция 11. Развитие инфинитезимальных методов в первой половине XVII века

План лекции:

1. Характеристика эпохи.
2. Иоганн Кеплер и его астрономические работы.
3. Математические работы Кеплера.
4. Метод неделимых Кавальери.

1. Характеристика эпохи. Наиболее характерной чертой семнадцатого века является формирование в экономически развитых странах Европы, и прежде всего Англии, нового общественного строя – капитализма. Этот процесс был неразрывно связан с техническими изобретениями, машинным производством, переходом от мануфактурной промышленности к фабричной. В результате всех этих преобразований многократно усилилась роль буржуазии, которая в острой политической борьбе захватила власть сначала в Нидерландах, а затем в Англии. Техническая революция в свою очередь была связана с изменениями в научной области. На смену схоластической науке, господствовавшей в подавляющем большинстве университетов, пришло научное мировоззрение нового времени, основанное на наблюдении явлений природы, эксперименте и математической обработке полученных данных. От решения практических задач путь вёл к теоретической механике и к научному изучению движения и изменения вообще.

Большое влияние на формирование нового мировоззрения оказали открытия в области астрономии, интерес и внимание к которой определялись, прежде всего, необходимостью составления точных карт, без чего нельзя было совершенствовать технику дальнего мореплавания, получившего к тому времени огромное экономическое значение. Большую роль оказало и усовершенствование часов. Правильность их «хода» и те возможности, которые они давали для точного указания времени, производили глубокое впечатление на философски настроенные умы и рассматривались ими в качестве одой из важнейших характеристик вселенной, что оказало существенное влияние на развитие механистической концепции мира. Важную роль в формировании нового мировоззрения сыграл великий Галилео Галилей (1564–1642). Не будучи собственно математиком, он всячески пропагандировал применение математических методов при изучении явлений природы и дал превосходные образцы такого применения. Он создал новую механику свободно падающих тел, был основателем теории упругости и пламенным защитником системы Коперника. Но, прежде всего мы обязаны Галилею – более чем какому-либо

другому деятелю этого периода – духом новой науки, основанной на гармонии эксперимента и теории.

В XVII в. всё острее стала ощущаться тормозящая развитие науки роль университетов, сложившихся в период господства в Европе схоластики и сохранивших средневековый подход в учебном процессе и исследовательской деятельности. Учёные, в обход университетам, объединялись в дискуссионные кружки, из которых вырастали научные сообщества и академии, проникнутые новым духом исследований. Первая академия была основана в Неаполе (1560), за ней последовала «Академия рысьих» в Риме (1603), «Лондонское королевское общество» (1662 г.), Французская академия (1666). В эпоху, когда не существовало научных журналов, возросшая активность математиков находила своё выражение в оживленной переписке учёных и в деятельности дискуссионных кружков. Основной заслугой некоторых учёных было то, что они являлись своеобразными центрами научных связей. Среди таких подвижников особую известность приобрёл французский учёный Марен Мерсенн, чьё имя как математика сохранилось в термине «числа Мерсенна». В переписке с ним состояли Декарт, Ферма, Паскаль и многие другие математики. Несмотря на всю ценность научной переписки, она не могла удовлетворить запросы научной общественности в обмене информацией. В результате во второй половине XVII в. возникает новая форма научного общения, которая играет с тех пор исключительную роль, – научная периодика. Первые периодические издания выходят в академиях. С 1665 года издаются «Философские труды лондонского королевского общества», с 1682 – «Журнал учёных» в Париже, в Лейпциге – «Труды учёных» на латинском языке. С 1728 года в Петербурге издаются «Записки». Все эти организационные мероприятия (академии и журналы) обеспечили успешное развитие новой науки. Выработанные в XVII в. формы интернационального научного общения продолжают играть видную роль и в современной науке.

Европейская математика начала XVII века складывалась из арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. В арифметике к этому времени утвердилась арабская система счисления. Число в соответствии с древнегреческой традицией воспринималось как совокупность единиц, а обыкновенная дробь – как отношение чисел. Десятичные дроби были введены С. Стевином (1548 –1620) лишь в самом конце XVI века, а их запись в привычном для нас виде еще не оформилась. Отрицательные, впрочем, как и мнимые числа, использовались в качестве некоторых фиктивных символов, используемых в качестве удобных средств вычислений. Несмотря на достижения математиков XVI века в области алгебраического решения уравнений третьей и четвертой степеней, символическая алгебра находилась в зачаточном состоянии. Произведённая в конце XVI века Виетом реформа носила ещё половинчатый характер. Для него существовали две алгебры: одна имела дело с числами –

её Виет называл «числовой логистикой», другая распространялась на общие величины, располагаемые по ступеням (отрезок, квадрат, куб, квадрато-квадрат и т.д.), – её он называл «видовой логистикой». Из-за принятой им системы «ступеней» область операций над величинами, как и в геометрической алгебре Древней Греции, оказывалась ограниченной. Сформулированный им принцип однородности, не имевший значения для числовых уравнений, чрезвычайно отягощал всю технику исследования. В шкале величин видовой логистики не получили места ни дробные степени, ни отрицательные. В задачах с общими величинами Виет не употреблял радикалов, применявшихся им в числовых примерах к этим же задачам. Не признавал Виет и отрицательных чисел, из-за чего сужались возможности выполнять действия вычитания. Сложившиеся к началу XVII века методы задания и изучения геометрических линий мало отличались от разработанных еще в Древней Греции, да и сам набор этих кривых был невелик: прямая, конические сечения, спираль Архимеда, квадратриса, конхоида, циссоида и введённая лишь в конце XVI в. циклоида. Строились кривые конструктивно: либо сечением конуса, либо с помощью специально для этого конструируемыми или только воображаемыми инструментами. Изучались кривые с помощью симптом. Существовавшая алгебра была мало пригодна для этой цели.

Для того чтобы математика стала языком и орудием естествознания, она должна была быть преобразована сама. В первую очередь необходим был метод исследования общей переменной величины – математического эквивалента движения и зависимостей между переменными. Движение в ограниченных формах включалось, правда и в античную математику. Оно входило, например, в определение спирали Архимеда и некоторых других кривых. Но никогда переменные величины и зависимости между ними не превращались ещё в собственный предмет математического исследования. Быстрота и лёгкость, с которой в XVII веке движение и функциональная связь проникали в математику, в значительной мере определялись тем, что одни и те же учёные работали одновременно над проблемами механики и математики, и трудно было отделить одно от другого.

Во второй половине XVI и начале XVII веков, когда стало быстро нарастать количество и сложность выдвигаемых механикой и астрономией задач, требовавших применения инфинитезимальных методов, возрос и интерес к работам Архимеда, который не только усовершенствовал метод исчерпывания Евдокса, но и широко пользовался верхними и нижними интегральными суммами. Однако прямое использование методов, разработанных древнегреческими математиками, тормозило решение многих насущных задач естествознания. Последнее обстоятельство вынуждало некоторых творчески работающих учёных искать пути, позволяющие упрощать решение стоящих перед ними прикладных задач, прежде всего за счет отказа от

чрезмерной строгости, предъявлявшейся древними к доказательству своих утверждений. В частности, Кавальери утверждал: «Строгость – забота философов, а не геометров», а Паскаль писал: «Не логика, а приличествующая случаю ясность достаточна для правильных умозаключений». Первым, кто решительно разорвал с античными формами квадратур и кубатур, был великий немецкий астроном Иоганн Кеплер, который на многочисленных примерах доказал эвристическую ценность метода неделимых, который он, можно сказать, между строк вычитал в творениях Архимеда.

2. Иоганн Кеплер и его астрономические работы. Иоганн Кеплер родился в 1571 году на юге Германии в бедной протестантской семье. В пятнадцать лет, после обучения в монастырской школе, Кеплер поступил в духовную семинарию, откуда через три года перешел в духовную академию. Там на него большое влияние оказал астроном Местлин, ознакомивший Кеплера с гелиоцентрической системой Коперника. В 1593 году Кеплер окончил факультет и получил должность профессора в Граце. Однако уже в 1598 году терпимое отношение к протестантам на родине Кеплера сменилось религиозными притеснениями, завершившимися изгнанием протестантов за пределы области. После двухлетних странствований с семьёй Кеплер поступил на службу к Тихо Браге, знаменитому в то время астроному, великому мастеру наблюдений и вычислений. Когда в 1601 году Тихо Браге скончался, все результаты проводимых им многолетних наблюдений оказались в распоряжении Кеплера, который стал их тщательно и с трепетом обрабатывать. Они дали ему бесценный материал для изучения движения планет. Нелегко и непросто было из сырого материала наблюдений построить те три закона, которые и поныне известны каждому школьнику под именем законов Кеплера. Восемь лет неустанной работы потребовало открытие двух первых законов. Открыл их Кеплер на основании данных, относящихся к движению Марса. Эти данные показали Кеплеру, прежде всего, что расстояние от Марса до Солнца не остается неизменным, и, следовательно, либо Солнце находится не в центре круговой орбиты, либо сама орбита не круговая. Представление о круговых орбитах планет казалось Кеплеру таким непреложным, что долгое время он старался найти решение задачи, сохраняя круговую форму орбиты, но помещая Солнце вне центра этого круга. Неудачи этих попыток привели его к мысли, что орбита Марса имеет форму эллипса. Но и здесь на первых шагах его ждала неудача, ибо Кеплер помещал Солнце в центр эллиптической орбиты. Наконец, он догадался расположить Солнце в одном из фокусов эллиптической орбиты Марса, и эта идея подтвердилась данными наблюдений и вычислений. Так был открыт первый закон Кеплера, гласящий, что *каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

После установления формы траектории движения Марса Кеплер стал искать правило, позволяющее вычислять время его движения от одной точки орбиты до другой. Догадка, что определяется оно площадью, «заметаемой» отрезком, соединяющим Марс с Солнцем, пришла Кеплеру еще в период разработки им идеи о движении Марса по круговой орбите при смещенном положении Солнца. Трудность в установлении такого правила объяснялась тем, что к началу XVII века математики еще не умели вычислять площадь фокального эллиптического сектора (сектора с вершиной в фокусе эллипса), и Кеплеру пришлось выводить его самостоятельно. В соответствии с традицией выведенное Кеплером правило позволяло находить не саму «заметаемую площадь», а лишь её отношение к площади всего эллипса.

В соответствии с этим правилом для нахождения такого отношения Кеплер на большой оси эллипса, изображающего орбиту планеты, как на диаметре, строил окружность. Разделив её на достаточно большое число равных частей (например, на 360), он проектировал точки деления на ближайшие дуги эллипса. Соединив образовавшиеся на эллипсе точки с фокусом эллипса, в котором предположительно располагалось Солнце, Кеплер находил сумму длин всех радиус-векторов, попавших в сектор, заметаемый отрезком, соединяющим Солнце с движущейся планетой. Разделив полученную сумму на сумму длин всех построенных радиус-векторов эллипса, Кеплер получал число, характеризующее искомое отношение. Результат был тем точнее, чем на большее число частей делилась окружность.

Сам второй закон в его авторской формулировке гласил: *время, употребляемое планетой для перемещения от конца большой оси до произвольного её положения, относится ко времени полного оборота как сумма радиус-векторов, проведенных ко всем точкам дуги, к сумме радиус-векторов всего эллипса.*

Ещё раз заметим, что для Кеплера сумма радиус-векторов не равна площади, а лишь пропорциональна ей, как это явствует из приведенной выше формулировки второго закона. Кроме того, очевидно, хотя это прямо и не сказано, что эти радиус-векторы должны браться не как попало, а по указанному выше правилу. Можно убедиться, проведя соответствующие построения и вычисления, что если, например, радиус-векторы проводить так, чтобы на равные части делилась дуга эллипса, а не соответствующая дуга окружности, то площадь сектора отнюдь не будет (даже приближенно) пропорциональна сумме содержащихся в нём радиус-векторов.

Подробное описание рассуждений, приведшее Кеплера к сформулированному выше правилу, он изложил в своей вышедшей в 1609 году в Праге работе «Новая астрономия», в которой были сформулированы два первых закона движения планет.

В несколько осовремененном виде эти рассуждения могут быть представлены следующим образом.

Пусть дан эллипс с полуосями $OA = a$ и $OB = b$, $a > b$ и эксцентриситетом $\varepsilon = c : a$, *где* $c = FO$ – расстояние от фокуса до центра эллипса (рис.1). Отметив на дуге эллипса две близко лежащие точки M и M_1, соединим их с фокусом эллипса *F*. Для оценки площади фокального сектора MFM_1 на большой оси эллипса, как на диаметре, построим окружность и на ней отметим точки N и N_1 – проекции точек *M* и M_1 в направлении малой оси эллипса. Соединив построенные точки отрезками *NF* и N_1F с точкой *F*, получим еще один сектор NFN_1.

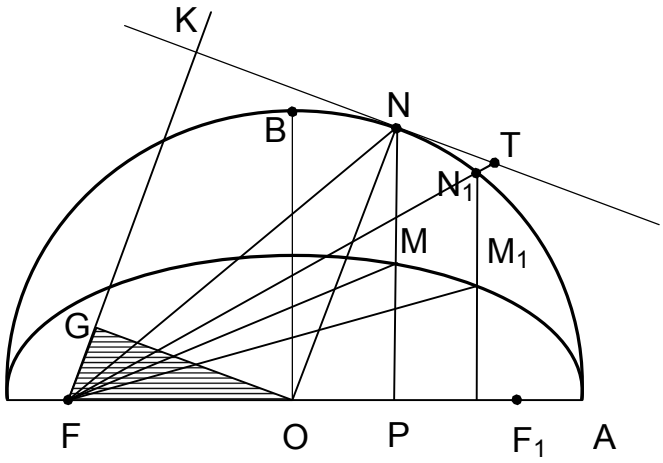


Рис. 1

Заметим, что отношение площади сектора MFM_1 к площади сектора NFN_1 равно коэффициенту $k = \frac{b}{a}$ сжатия круга при его отображении в эллипс.

Рассмотрим теперь фокальный радиус-вектор FM. Как известно, он равен $a + \varepsilon \cdot x$, где x – абсцисса точки M. Проведем из фокуса *F* отрезок FK параллельно радиусу *ON* до пересечения в точке *K* с касательной к окружности в точке *N*. Затем из точки O опустим перпендикуляр *OG* на прямую *FK*. Получим прямоугольник $OGKN$, откуда следует, что $GK = ON = a$. Обратимся теперь к треугольникам OGF и NPO. Из их подобия следует, что $\frac{FG}{OF} = \frac{OP}{ON}$, откуда $FG = \frac{OF}{ON} \cdot OP = \frac{c}{a} \cdot x = \varepsilon \cdot x$, и, так как $GK = a$, то отрезок $FK = GK + FG = a + \varepsilon \cdot x$. Учитывая, что и $FM = a + \varepsilon \cdot x$, получаем, что $FK = FM$.

Если точка N_1 близка к точке N, то сектор NFN_1 мало отличается от треугольника NFT, в котором точка T есть точка пересечения луча FN_1 и касательной NK. Площадь этого треугольника равна половине произведения высоты FK на основание NT. Но при малой дуге NN_1 её длина мало отличается от длины отрезка NT. Поэтому площадь сектора NFN_1 мало отличается от половины произведения отрезка FK на дугу NN_1. Но, как было доказано, FK=FM, откуда: $S_{MFM_1} = k \cdot S_{NFN_1} = k \cdot 0.5 \cdot FM \cup NN_1$.

Основываясь на полученном результате, Кеплер ищет выражение для площади произвольного сектора AFM эллипса, фокальный радиус FA которого лежит на большой оси эллипса. Для этого, построив, как и прежде, на

большой оси эллипса окружность, спроектируем на неё (вдоль малой оси эллипса) дугу AM. Полученную дугу окружности обозначим AN. Разделим окружность на достаточно большое число равных дуг с таким расчетом, чтобы точка A стала одной из точек деления, и спроектируем полученные точки на эллипс. Точки, образовавшиеся на дуге AM, обозначим M_k, где k=0,1,2,…,n, причем так, чтобы точка M_0 совпала с точкой A, а точка M лежала между точками M_n и M_{n-1}. Тогда площадь сектора AFM будет приближенно равна:

$$S_{AFM} \approx \sum_{i=0}^{n-1} S_{M_i F M_{i+1}} \approx \sum_{i=0}^{n-1} k \cdot 0.5 \cdot FM_i \cdot \cup N_i N_{i+1} = k \cdot 0.5 \cdot l \cdot \sum_{i=0}^{n-1} MF_i ,$$

где l – длина дуги $N_i N_{i+1}$. Это равенство тем точнее, чем меньше l.

Примерно таким образом, разумеется, без использованной нами символики, Кеплер доказывает, что площадь сектора AFM эллипса пропорциональна сумме длин n радиус-векторов ($\sum_{i=0}^{n-1} MF_i$), входящих в этот сектор. Отсюда в свою очередь следует, что отношение площадей двух секторов равно отношению сумм составляющих их радиус-векторов.

Примененный Кеплером метод нахождения отношений фокальных секторов напоминает методы, описанные Архимедом в его «Послании к Эратосфену». Близки эти методы даже терминологически: и в «Новой астрономии» Кеплера и в «Послании к Эратосфену» Архимеда о площади говорится как о сумме линий, хотя и тот и другой прекрасно понимали, что речь идет не о сумме в обычном смысле этого слова. Из этого совпадения вовсе не следует, что Кеплер читал «Послание». Нет ни одного факта, свидетельствующего, что это «Послание» было известно математикам XVII века. Об эвристических методах, использовавшихся Архимедом, Кеплер мог только догадываться. Естественно, что такая догадка могла появиться только в результате неформального чтения Архимеда, глубокого проникновения в мысли последнего. Но были и принципиальные различия в их подходах к вычислению площадей и объемов. Архимед каждое такое вычисление завершал доказательством от противного и только эту часть исследования доводил до сведения читателей. Кеплер, наоборот, ограничивался первой, эвристической частью, не считая доказательство от противного для себя обязательным, из-за чего подвергался довольно жесткой критике со стороны многих современных ему математиков.

Материальное положение вынудило Кеплера переехать из Праги в Линц, где он получил место школьного учителя. Большая семья, постоянная забота о куске хлеба отягчались заботами о спасении матери, обвиненной в колдовстве, что грозило ей сожжением на костре. В этих тяжелейших условиях Кеплер сумел написать и в 1615 году опубликовать принципиальный по своему

значению труд «Новая стереометрия винных бочек», в котором обосновывалась правомерность использования разработанных им инфинитезимальных построений. Вслед за этим в 1619 году Кеплер опубликовал произведение «Гармония мира», обосновывающее его третий закон: *квадраты времён обращений планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний от Солнца.*

Хлопоты об уплате причитающегося ему жалования (за свою тридцатилетнюю службу он получил только восьмимесячный оклад) заставляли его неоднократно предпринимать поездки в имперскую резиденцию. В 1630 году во время одной из таких поездок Кеплер скончался.

Революция в астрономии, связанная с именами Коперника, Тихо Браге и Кеплера, позволила совершенно по-новому взглянуть на место человека во вселенной и на возможности человека рациональным образом объяснить астрономические явления. То, что небесные явления подчиняются законам земной механики, придавало смелости людям науки. Стимулирующее влияние новой астрономии на проблемы, связанные с большими вычислениями, а также с инфинитезимальными методами, особенно хорошо видны в трудах Кеплера.

3. Математические работы Кеплера. Рассмотрим теперь более подробно главный математический труд Кеплера «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии». Его исключительное значение с точки зрения истории анализа бесконечно малых величин определяется тем, что это первая работа нового времени, явно вводящая в геометрию бесконечно малые величины и принципы интегрального исчисления. Хотя, как говорит сам Кеплер во введении, поводом и целью написания книги первоначально явился совершенно частный и практический вопрос об измерении объема винных бочек при помощи одного промера их поперечной длины, весь интерес сосредоточивается на общих принципах определения с помощью бесконечно малых величин – объемов тел вращения.

Книга состоит из трех частей. Основной интерес для нас представляет первая часть, в которой рассматривается «Стереометрия правильных кривых тел» и «Дополнение к Архимеду». Во второй части, посвященной специально стереометрии австрийской бочки, Кеплер рассматривает ряд задач на максимум. Хотя строгие доказательства ему удается дать в чисто геометрической форме, но во многих местах он явно рассуждает совсем в духе современного дифференциального исчисления. В третьей части идет речь об употреблении всей «книги о бочках». Если в «Новой астрономии» основным приемом было вычисление отношений между суммами неделимых, то в «Новой стереометрии винных бочек» им становится преобразование одних фигур в другие на

основании равновеликости их соответственных беспредельно малых частей или же неделимых элементов.

Вводя в геометрию по существу новые идеи, Кеплер сохраняет для выражения своих теорем обычные, принятые в античной математике формы, широко используя свойства пропорций, и совершенно не пользуется услугами алгебры, отчего его изложение во многих местах становится тяжеловесным, а иногда и просто путаным.

В первой, теоретической, части своего труда Кеплер на примере вычисления площади круга сопоставляет свой метод с методом «косвенного, приводящего к невозможности» доказательства Архимеда. Для лучшего понимания дальнейших рассуждений Кеплера приведем доказательство, которого у автора нет, но оно предполагается хорошо известным.

Итак, предположим, что надо доказать равновеликость круга с центром в точке A, построенного на диаметре GB и треугольника, основанием которого служит отрезок BC, длина которого равна длине окружности, а высота AB – радиусу круга (рис.2). Доказательство проведем косвенным методом,

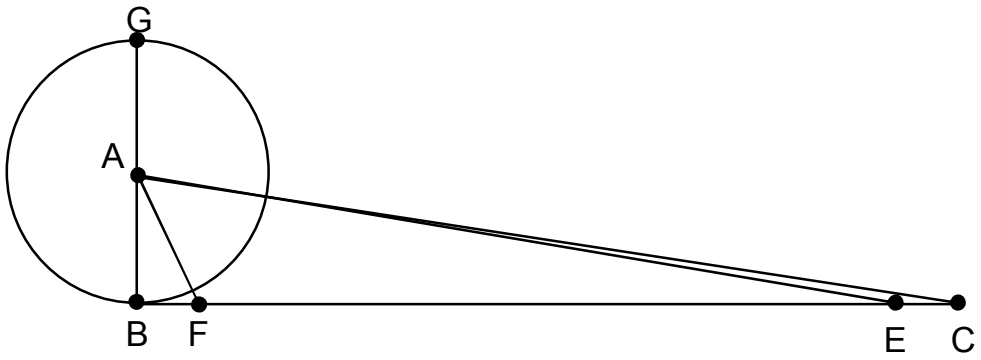


Рис. 2

которым античные математики доказывали подобные теоремы. Предположим, что рассматриваемое утверждение не верно. Тогда возможны два случая:

1) площадь круга (обозначим её K) больше площади треугольника (обозначим её L), т.е. $K>L$;

2) площадь круга меньше площади треугольника, т.е. $K<L$.

Рассмотрим случай первый, когда $K>L$. Обозначим $\Delta=K-L$. Из предложения второго двенадцатой книги «Начал» Евклида следует, что какой бы ни была площадь Δ, всегда можно вписать в круг правильный многоугольник со столь большим числом сторон, что его площадь S_n будет отличаться от площади круга на величину, меньшую Δ:

$K-S_n<\Delta=K-L$, откуда следует, что $S_n>L$. (1)

Но, с другой стороны, так как периметр вписанного многоугольника меньше длины окружности, т.е. меньше катета BC, а апофема меньше катета

AB, то площадь вписанного многоугольника должна быть меньше площади треугольника ABC, то есть $S_n<L$. (2)

Неравенства (1) и (2) , однако, противоречат друг другу, чем и доказывается несостоятельность первого предположения, что K>L.

Аналогично доказывается несостоятельность и второго предположения, что K<L.

Из невозможности неравенств K>L и K<L следует K=L, что и требовалось доказать. По поводу этого доказательства Кеплер замечает, что прежде чем применять метод косвенного доказательства, надо *знать,* что площадь круга равна площади треугольника, построенного указанным выше способом. Но откуда античные математики могли это знать? Отвечая на этот вопрос, Кеплер пишет: «Мне же кажется, что смысл этого (доказательства) следующий. Окружность круга BG (рис.2) содержит столько же частей, сколько точек, – именно бесконечное число. Каждую из них рассмотрим как основание некоторого равнобедренного треугольника с боковой стороной AB, и таким образом в площади круга окажется бесконечное множество треугольников, соединенных вершинами в центре A. Пусть, далее, окружность круга BG вытянута в прямую линию и пусть ей равна BC, а AB к ней перпендикулярна. Тогда основания всех этих бесчисленных треугольников, или секторов, будут представляться расположенными друг за другом по прямой BC. Пусть одно из таких оснований будет BF и какое-нибудь равное ему – CE; наконец, соединим точки F, E, C с A. Таких треугольников ABF, ACE над прямой BC получится столько же, сколько секторов в площади круга, и их основания BF, EC и общая высота AB будут такие же, как у секторов; следовательно, все эти треугольники ABF, ACE и т.д. будут равновелики (друг другу), и каждый из них будет равновелик соответствующему сектору круга. А значит, и все вместе эти треугольники, имеющие основания на линии BC, т. е. треугольник BAC, всеми ими составленный, будет равновелик сумме всех секторов круга, т. е. составленной ими площади круга. *Это самое и имеет в виду архимедово приведение к нелепости* (выделено авторами)».

В «Стереометрии правильных кривых тел» метод суммирования актуально бесконечно малых Кеплер распространяет и на другие известные Архимеду несложные геометрические фигуры и тела (конусы и цилиндры) и их части, причем, он считает, что Архимед, получая эти результаты, не мог рассуждать иначе, чем он. Как мы теперь знаем, Кеплер был недалек от истины, так как его рассуждения действительно весьма близки по идее к эвристическому методу, изложенному в письме Архимеда к Эратосфену.

В «Дополнении к Архимеду» Кеплер переходит к изучению тел, образованных вращением круга около прямой линии, не проходящей через его центр, а также вращением других конических сечений. Всего он рассматривает 92 вида тел вращения. Эти тела, до него в большинстве случаев не рас-

сматривавшиеся, Кеплер называл по внешнему виду «лимонами», «яблоками», «вишнями», «турецкими чалмами» и т. п.

Метод вычисления объемов тел вращения и их частей был у Кеплера единым. Во-первых, изучаемое тело делилось на бесконечное множество частиц, «ломтей», занимающих равноправные положения в теле. Во-вторых, эти части тела перегруппировывались, образуя другое тело, объем которого возможно вычислить. Если непосредственное суммирование оказывалось невозможным провести, то они предварительно заменялись другими частицами, эквивалентными данным.

Разъясним этот метод на наиболее простом примере вычисления объема тора, который Кеплер называл кольцом. В теореме 18 он доказал, что всякое «кольцо кругового или эллиптического сечения равновелико цилиндру, высота которого равна длине окружности, описываемой центром сечения, а основание – сечению кольца». Для доказательства этого утверждения Кеплер меридиональными сечениями разбивает тор на большое число «кружочков», толщина каждого из которых у внешнего края тора больше, чем у внутреннего, а их среднее арифметическое равно толщине «кружочка» в его центральной части. Затем Кеплер заменяет каждую из нарезанных долей равновеликим ей цилиндриком, высота которого равна толщине центральной части кружочка. Ставя друг на друга эти цилиндрики, Кеплер и получает цилиндр, равновеликий тору.

Методы, применяемые Кеплером для нахождения объемов тел вращения, разумеется, были нестрогими. Это было ясно и ему самому. Кеплер говорил о доказательствах Архимеда, что они «абсолютны и во всех отношениях совершенны», но он оставлял их для людей, склонных увлекаться точными доказательствами. Каждый последующий автор, по его мнению, мог вводить строгость на свой лад или пренебречь ею. Кроме того, в спешке, в которой, по-видимому, писалась работа, Кеплер допустил несколько досадных ошибок. Вокруг Кеплеровых суммирований бесконечно малых разгорелись страсти. Как и во все эпохи, не было недостатков в придирчивых критиках. Один из учеников Виеты написал даже специальное сочинение «В защиту Архимеда», в котором обвинил Кеплера в оскорблении памяти Архимеда.

Тем не менее, плодотворность метода суммирования элементов, вычитанная у Архимеда Кеплером, была очевидной. Предпринятая им попытка создать регулярный алгоритм оперирования с бесконечно малыми величинами стала весьма популярной. Многие ученые посвятили свои работы усовершенствованию оперативной стороны этого предприятия и рациональному разъяснению возникающих при этом понятий. Наибольшую известность приобрела геометрия «неделимых», разработанная известным итальянским ученым Кавальери.

4. Геометрия неделимых Кавальери. Бонавентура Кавальери (1598–1647), ученик Галилея, происходил из знатного рода. Монашеская карьера сочеталась в его жизни с научной и преподавательской деятельностью по математике. С 1629 г. по рекомендации Галилея он занял кафедру математики в Болонье, будучи одновременно настоятелем католического монастыря. Прекрасный знаток античных авторов, он в то же время глубоко изучал высказанные Галилеем и Кеплером идеи создания исчисления неделимых. Кавальери написал ряд сочинений по астрономии, технике вычислений, коническим сечениям, тригонометрии. В 1632 г. он опубликовал 11-значные таблицы логарифмов тригонометрических функций. Но делом его жизни, имевшим наибольшее значение для развития математики, был метод неделимых, задуманный как универсальный метод геометрии.

Идея общего метода неделимых была впервые высказана Кавальери в 1621 году. Через восемь лет в рукописи, представленной им при занятии профессорской должности, уже имеет место систематическое применение «неделимых». Итогом многолетнего усовершенствования метода «неделимых» явилась книга «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного», опубликованная в 1635 году. Этому же предмету была посвящена книга Кавальери «Шесть геометрических опытов», изданная в 1647 году.

В своей геометрии Кавальери построил упрощенную разновидность исчисления бесконечно малых, основанную на схоластическом представлении о неделимых. В ней как фигуры, так и тела представлялись составленными из элементов, имеющих размерность, на единицу меньшую размерности заданных объектов. Так, плоские фигуры он считал составленными из отрезков прямых, проведенных параллельно некоторой направляющей прямой, названной им «регулой». Этих воображаемых отрезков бесконечно много. Они заключены между двумя касательными, параллельными регуле, которые Кавальери называл парными.

В пространственных телах в качестве неделимых принимались плоские фигуры, параллельные некоторой плоскости, избранной в качестве регулы. Их тоже бесконечно много; границами их совокупности служили две парные плоскости, параллельные регуле. Часто одна из них избиралась в качестве регулы. Образно выражая идею своего метода, Кавальери предлагал читателям представить паука, непрерывно ткущего геометрию из неделимых.

Толчком к построению геометрии «неделимых» мог послужить метод, использованный Кеплером в его «Новой астрономии». Действительно, предположим, что надо найти отношения площадей двух плоских фигур. Это можно сделать методом, в определенном смысле аналогичным тому, которым Кеплер вычислял отношение фокальных секторов. В частности, для этого достаточно, выбрав регулу, провести параллельно ей на равном расстоя-

нии друг от друга систему прямых, пересекающих данные фигуры. Затем, просуммировав длины отрезков, образовавшихся в каждой из этих фигур, надо найти их отношение. Оно и дает приближенное значение искомого отношения площадей. Точность результата тем выше, чем ближе друг к другу проводились прямые.

Отсюда один шаг до утверждения, что если рассматривать бесконечно много прямых, расположенных как угодно близко друг к другу, то отношение площадей будет выражаться отношением совокупностей образовавшихся отрезков. Более того, появляется соблазн каждую такую систему отрезков (но не их совокупную длину) отождествить с площадью содержащей её фигуры.

Ещё на начальной стадии разработки своего метода Кавальери в переписке с Галилеем обсуждал вопрос: представляют ли «все линии» двух плоских фигур величины, находящиеся между собой в некотором отношении. При этом он приводил доводы в пользу как положительного, так и отрицательного ответа, но сам склонялся к первому. Впоследствии он выразил свою точку зрения следующими словами: «Независимо от того, состоит ли непрерывное из неделимых или не состоит, совокупности неделимых сравнимы между собой, и величины их стоят в определенном отношении друг к другу». Сравнение площадей плоских фигур Кавальери сводил к сравнению всех линий, которые можно представить себе как сечения фигур движущимися или текущими прямыми, остающимися в процессе такого движения параллельными регуле. Аналогично для сравнения объемов тел он вводил взятые во всей их совокупности плоские сечения.

Естественно, что все эти пояснения не разрешали логические трудности, связанные с пониманием «неделимого». Как площадь может быть составлена из линий, не имеющих ширины, а тело – из плоскостей, не имеющих толщины, и вообще, что представляет собой совокупность всех неделимых того или иного рода?

Не будучи в состоянии дать вразумительный ответ на подобные вопросы, Кавальери, как правило, ограничивался наиболее простым случаем, когда фигуры (тела) располагались между одной и той же парой параллельных регул, а отношение неделимых, расположенных на одной секущей (прямой или плоскости), было постоянным и равным, например, числу k. То, что в этом случае отношение площадей фигур (или объемов тел) равно тому же числу k, должно было казаться очевидным. Действительно, предположим, что проведено n секущих, параллельных регуле, а отношение неделимых, расположенных на одной секущей, постоянно и равно k. Тогда при любом значении n отношение суммы всех неделимых первой фигуры к сумме всех неделимых второй фигуры будет тоже равно числу k. По представлению Кавальери и его сторонников, при неограниченном увеличении числа секущих с одновременным их неограниченным сближением неделимые полно-

стью заполняли фигуры, откуда и следовала, по их мнению, справедливость утверждения, высказанного относительно площадей.

Из этого утверждения, в частности, следовало, что объемы двух тел равны, если равны между собой площади каждой пары соответственных их сечений, проведенных параллельно некоторой данной плоскости. Это предложение было впоследствии включено во многие учебники геометрии в качестве очевидного «принципа Кавальери».

На то, что более свободное (без указанных ограничений) использование метода неделимых может привести к ошибке, указывал сам Кавальери. В качестве примера он рассмотрел два заведомо неравных треугольника: AHD и GHD, а в качестве регулы – их общую сторону HD (рис. 3). Соответствие между неделимыми устанавливают следующим образом: отрезку KB треугольника AHD ставится в соответствие отрезок MF треугольника GHD, такой, что KM параллельна AG.

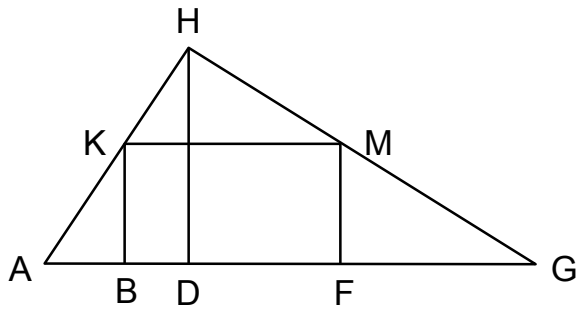


Рис. 3

Так как соответствующие неделимые равны (KB=MF), то, казалось бы, треугольник AHD должен был быть равным треугольнику GHD, какими бы ни были отрезки AD и DC, что на самом деле неверно. Ошибка произошла, как указывает Кавальери, из-за неверного выбора регулы, которую надо было взять параллельной прямой AG. В этом случае рассматриваемые треугольники оказались бы лежащими между одной и той же парой параллельных прямых, а отношение соответственных отрезков – равным отношению оснований треугольников, т. е. отношению AD:DG. Сам Кавальери и его последователи, осмотрительно используя метод неделимых, сумели получить ряд замечательных результатов.

Кавальери рассматривал и отношения степеней неделимых. В частности, введя понятие совокупности квадратов неделимых, он доказал, что сумма квадратов неделимых параллелограмма втрое больше суммы квадратов неделимых треугольника, образованного в результате проведения диагонали, откуда следовало, что объем призмы с квадратным основанием в три раза больше пирамиды с тем же основанием и той же высотой.

Для доказательства этого утверждения Кавальери в параллелограмме ACGT (рис. 4) проводит произвольную секущую RV, параллельную AC. Затем, пользуясь средствами геометрической алгебры, доказывает, что сумма квадратов, построенных на отрезках RT и TV, равна удвоенной сумме квадратов, построенных на отрезках RS и ST. Этот факт легко доказать алгебраи-

чески, если, обозначив, $AC=\alpha$, $RT=x$, $TV=y$, $ST=z$, $RS=\frac{a}{2}=b$ и выразив $x=b+z$, $y=b-z$, найти сумму $x^2+y^2=2\left(b^2+z^2\right)$ (3)

Располагая квадраты, построенные на отрезках RT, TV, RS и ST перпендикулярно плоскости, получим, что совокупность квадратов на RT образует пирамиду с квадратным основанием на отрезке AC и вершиной в точке E. Сумма квадратов на TV – равновеликую ей пирамиду с квадратным основанием на EG и вершиной в точке C. Объем каждой из этих двух пирамид обозначим $V_{б.пир}$. Сумма квадратов на отрезке RS образует призму с квадратным основанием на AB и высотой, равной высоте параллелограмма. Её объем ($V_{м.приз.}$) равен четверти объема большой призмы с квадратным основанием на отрезке AC ($V_{б.приз.}$). Наконец, совокупность квадратов, построенных на отрезке ST, образует две равновеликие малые пирамиды с квадратными основаниями на BC и EF и общей вершиной в точке M. Объем каждой из этих двух пирамид ($V_{м.пир.}$) в восемь раз меньше объема большой пирамиды ($V_{б.пир.}$). Соотнеся эти значения ч равенством (2), получим:

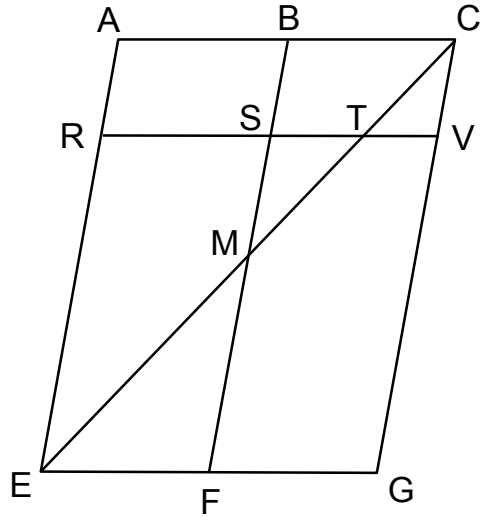


Рис. 4

$$V_{б.пир.}=1/4\cdot V_{б.приз}+2\cdot 1/8\cdot V_{б.пир.}\text{, откуда}$$
$$V_{б.приз}=3V_{б.пир.}$$

Другим обобщением метода явилось введение криволинейных неделимых. С их помощью итальянский математик Э. Торричелли, горячий приверженец идей Кавальери, впервые сумел определить объем тела, образованного вращением ветви гиперболы (ограниченной ординатой) вокруг оси ординат.

Метод неделимых позволил решить множество трудных задач, ранее не поддававшихся решению. У него появились горячие приверженцы. Торричелли писал, что новая геометрия неделимых переходит из рук одних ученых к другим как чудо науки; она, по мнению Торричелли, убедила мир, что век Архимеда и Евклида были годами детства ныне взрослой геометрической науки.

Однако у этого метода были свои недостатки. Во-первых, он был непригоден для измерения длин кривых, так как соответствующие неделимые (точки) оказывались безразмерными. Во-вторых, оставалось невыясненным само понятие «неделимого», что придавало всей теории атмосферу необос-

нованности. В-третьих, развитие метода сильно задерживалось из-за того, что Кавальери в соответствии со сложившимися в его время представлениями о научной строгости избегал применять символику и приемы алгебры.

Существенный вклад в разработку инфинитезимальных методов внес английский математик Джон Валлис (1616–1703). Сын кенского священника, Валлис, получил хорошее классическое образование, но с арифметикой познакомился только случайно и занимался ею в часы досуга для своего удовольствия. У него была феноменальная память на числа, так что однажды в бессонную ночь он вычислил в уме 27 цифр квадратного корня из 53-значного числа и утром продиктовал их. Занимаясь самообразованием, он стал читать математические книги, которые случайно попадались ему; по большей части эти книги носили прикладной характер. Затем он познакомился с произведениями Кавальери, Торричелли, Декарта, а позже с античными математиками. Со временем у него обнаружились большие способности к расшифровке криптограмм. С 1649 года Валлис занимал кафедру геометрии в Оксфорде. В своих математических исследованиях он проявил способности к числовой индукции – интерполяции, как он называл её, и чутьё к аналогии. Благодаря этим свойствам он пришел к имеющим большое значение общим результатам; некоторые из них были строго доказаны современными ему математиками, справедливость же других была доказана лишь впоследствии.

Главный труд Валлиса «Арифметика бесконечных величин» появился в 1655 г. В нём он разработал арифметический вариант метода неделимых. Следуя Кавальери, он опирался на представление, что плоские фигуры состоят из бесконечного числа параллельных прямых, а тела – из параллельных плоскостей. Однако, в отличие от Кавальери, отношение «всех линий» и их степеней Валлис выражал с помощью сумм арифметических рядов.

Вот, например, как он доказывал рассмотренную выше теорему о том, что сумма всех квадратов, построенных на параллелограмме ACGE, в три раза больше суммы квадратов, построенных на треугольнике ACE. С этой целью он, разделив сторону AE на m равных частей, проводит через точки деления прямые, параллельные стороне AC (рис. 5). Обозначив длины образовавшихся отрезков числами 0, 1, 2, … m и сделав соответствующие расчеты, он легко получал, что сумма квадратов на треугольнике ACE относится к сумме квадратов на параллелограмме как:

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+m^2}{m^2+m^2+m^2+\ldots+m^2}=\frac{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}}{(m+1)m^2}=\frac{2m+1}{6m}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6m}.$$

При неограниченном увеличении числа m это отношение стремится к одной трети, что и доказывает теорему.

В той же работе аналогичным способом Валлис доказывает, что площади криволинейных трапеций, ограниченных сверху параболами $y=x^2$ и $y=x^3$, на отрезке [0, x] равны, соответственно, $\frac{x^3}{3}$ и $\frac{x^4}{4}$. Отсюда он делает общий вывод, который мы теперь выражаем формулой:

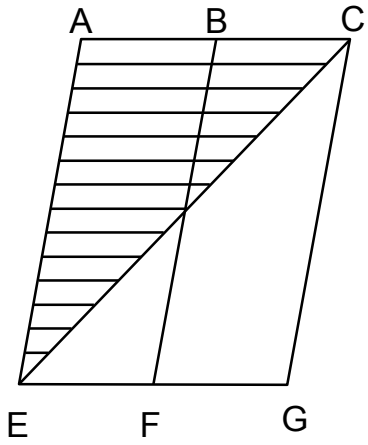


Рис. 5

$$\int_0^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ для всех целых } n > 0.$$

Квадратуру криволинейной трапеции, ограниченной параболой с дробным показателем степени, он выполнил с помощью интерполяции, проверенной на нескольких примерах.

К концу первой половины XVII века математики при решении задач на вычисление площадей и объемов все чаще стали обращаться к методу интегральных сумм, хотя еще долго отдельные остроумные и изящные решения продолжали получать методом неделимых в форме, которую ему придали Кавальери и Валлис.

Лекция 12. «Универсальная математика» Декарта

План лекции:

1. Рене Декарт – философ и математик. (1596-1650).
2. «Геометрия» Декарта.
3. Пьер Ферма и его аналитическая геометрия.
4. Влияние «Геометрии» на дальнейшее развитие математики.
5. Задачи на квадратуры и касательные.
6. Степенные ряды.

1. Рене Декарт – философ и математик. Мощный импульс в своем развитии математика XVII века получила с публикацией в 1637 году «Геометрии» Рене Декарта. Первоначально эта книга была опубликована в качестве приложения к его философскому трактату «Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках. Вместе с Диоптрикой, Метеорами и Геометрией, которые суть примеры этого метода». Впоследствии она неоднократно переиздавалась в качестве самостоятельных изданий. Во второй половине XVII века «Геометрия» являлась настольной книгой всех творческих математиков.

В истории математики значение «Геометрии» Декарта определялось, прежде всего, тем, что под её влиянием был совершен переход к новой математике, характерными признаками которой было введение понятия переменной величины, широкое применение символической алгебры, сменившей видовую логистику Виета, и глубокое проникновение арифметики в геометрию.

Рене Декарт родился в 1596 году во Франции в дворянской семье. Получил хорошее образование в иезуитском колледже. Там он проявил большой интерес к математике. Много лет спустя после окончания колледжа, Декарт свидетельствовал, что ему «особенно нравились математические науки верностью и очевидностью их рассуждений». Вместе с тем он проникся пренебрежением к школьной философии средневековья, к чистой логике. Из колледжа Декарт вышел с интересом к математическим наукам и с мыслью о необходимости выработать новые правила рассуждения и исследования.

Его отец, желая видеть сына военным, в 1613 году отправил Рене в Париж. Однако и там Декарт основное время посвящал научным занятиям. Лишь в 1617 году, уступая давлению родных, поступил волонтером в армию Мориса Оранского и затем несколько лет, правда, с долгими перерывами, провел в сражениях тридцатилетней войны. Но и в этих условиях он все свое свободное время отдавал научным изысканиям. Они касались механики, оптики и математики. В этот период его привлекают решение кубического

уравнения и задача о делении угла на три или более равные части. По примеру древнегреческих математиков Декарт строит механизмы (циркули), дающие нужные построения. Он открыл, но не опубликовал важное для топологии соотношение между числом ребер, граней и вершин выпуклых многогранников, много позже вновь найденное Эйлером, и начал интересоваться проблемой решения алгебраических уравнений в целом. К этому же времени относится геометрическое построение корней уравнения четвертой степени без второго члена с помощью параболы и окружности.

Однако основным направлением научных поисков Декарта в эти годы было создание общего метода мышления, который бы позволял быстрее делать изобретения и выявлять истину в науке. Так как единственной наукой о природе, обладавшей в известной мере систематическим строением, была тогда механика, а ключ к её пониманию давала математика, то последняя стала наиболее важным средством для понимания вселенной. Более того, математика со своими убедительными утверждениями сама была блестящим примером того, что в науке можно найти истину.

В исповедуемом Декартом и его последователями мировоззрении, названном по латинскому имени Декарта (Картезиус) картезианством, сочетался идеализм и механистический материализм. Как и платоники, верившие в авторитет, так и картезианцы, верившие в разум, считали математику царицей наук. Математические занятия Декарта в последующие семь-восемь лет мало известны. Около 1629 года Декарт сформулировал ряд важных положений своей теории познания в незаконченных и неопубликованных при его жизни произведениях. Новый научный метод был построен в немалой степени под влиянием математики. Декарт не отвергал эксперимент и индукцию вообще, однако считал, что точное и безусловное знание можно получить лишь путем непосредственного простого и отчетливого понятия здравого и внимательного ума, сразу схватывающего предмет (декартова «интуиция»).

Для Декарта математика была общей наукой о пространственных образах, их расположении и измерении и в таком качестве являлась общим методом познания физического мира. Почему, спрашивал себя Декарт, к числу математических наук относят не только арифметику и геометрию, но и астрономию, музыку, оптику, механику? И отвечает: «К области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера, и совершенно несущественно, будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое». Поэтому, заключает Декарт, должна существовать некая общая наука, объясняющая всё относящееся к порядку и мере, не входя в исследование никаких частных предметов. Эту науку он предложил называть не иностранным словом «алгебра», а старым, уже вошедшим в употребление именем «всеобщей» или «универсальной» математики, ибо она

содержит в себе все то, благодаря чему другие науки называются частями математики.

Арифметика и геометрия того времени не обладали в глазах Декарта должной силой метода. «Универсальная математика» представляла, по замыслу Декарта, нечто целое. Буквенное исчисление в ней сливалось воедино с геометрией кривых; только их синтез, по мнению Декарта, давал ключ к решению любых задач математики. Однако исторически из «универсальной математики» выросли две науки: независимая от геометрии алгебра и опирающаяся на алгебру аналитическая геометрия.

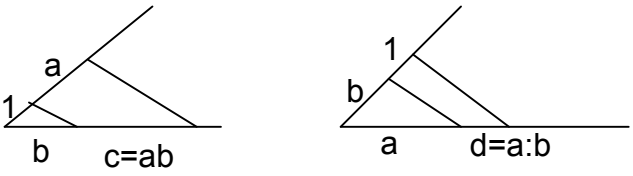


Рис. 6

В конце 20-х годов в жизни Декарта произошел перелом, намечавшийся, впрочем, много ранее. Его система воззрений, во многом противоречащая официальным религиозным догмам, в основном сложилась, и он, опасаясь преследований католической церкви, стал искать уединения и покоя, чтобы без помех осуществить намеченные им обширные планы. Он резко сократил личное общение с учеными, в том числе с друзьями, и переселился в Голландию. Там он прожил в одиночестве почти двадцать лет, и там же были изданы его главные труды.

Однако и в Голландии философские воззрения Декарта навлекли на него гнев местных протестантских церковников, и он, для того чтобы «хорошо укрыться», в 1649 году по приглашению королевы Христины переехал в Стокгольм. Однако суровый климат Швеции оказался для Декарта губительным, и он умер от простуды в начале 1650 года.

2. «Геометрия» Декарта. Содержание и смысл своей «универсальной математики» Декарт изложил в «Геометрии», написанной в кратчайший срок и опубликованной в 1637 году в качестве третьего приложения к «Рассуждению о методе». Вместе с «Оптикой» и «Метеорами», объяснявшими ряд атмосферных явлений, «Геометрия» служила образцом применения общего метода.

«Геометрия» Декарта состоит из трех книг, первая из которых называется «О задачах, которые можно построить, пользуясь только кругами и прямыми линиями». В ней Декарт, прежде всего, пересматривает вопрос о связи между арифметикой и геометрией и, как следствие, – вопрос о природе числа. Известно, что в «Геометрической алгебре» древнегреческих математиков исчисление отрезков носило ступенчатый характер, например, произведение двух отрезков давало не отрезок, а прямоугольник, а произведение прямоугольника на отрезок – параллелепипед. Это обстоятельство в свою очередь

вело к «видовой логистике» Виета, усложнявшей применение алгебраических методов к решению геометрических задач.

Уже на первых страницах «Геометрии» Декарт, введя единичный отрезок, строит исчисление отрезков, в котором не только сумма и разность, но и произведение и частное двух отрезков является снова отрезком. В этих целях используется правило построения на сторонах произвольного угла отрезка, четвертого пропорционального к трем данным. В частности, отрезок *c*, равный произведению отрезков *a* и *b* ($c = a \cdot b$), Декарт находит из пропорции $1 : b = a : c$, а отрезок d, равный отношению отрезка *a* к отрезку *b* ($d = a : b$), из пропорции $b : a = 1 : d$. Геометрическое построение соответствующих отрезков приведено на рисунке 6. Аналогичным образом он строит степени и корни из отрезков.

Введенное исчисление отрезков позволило Декарту всякую положительную величину, рациональную или иррациональную, выражать прямолинейным отрезком, длина которого соответствовала числовому значению величины. Обозначая отрезки буквами и введя знаки, обозначающие операции над отрезками – числами, Декарт строит геометрическую основу так, чтобы буквенная алгебра была подобна числовой. В ней совершенно отпадала забота о соблюдении однородности, поскольку все члены любого уравнения были отрезками. Если в какой-нибудь задаче, в которой единица еще не определена, приходилось складывать по форме неоднородные члены, скажем a^2 и b^3, то всегда можно было представить себе, что они помножены или поделены столько раз на единицу, что измерения их одинаковы. Так устанавливался полный параллелизм между исчислением отрезков и числовой алгеброй.

Трактуя всякое вещественное число как отрезок и введя единичный отрезок, Декарт открыл путь к новому общему определению положительного числа, хотя сам его и не сформулировал. По-иному он ввел в арифметику и отрицательное число, служившее ранее лишь в качестве удобной фикции. Построение уравнений привело Декарта к выражению отрицательных корней отрезками, располагавшимися по другую сторону от оси, чем положительные отрезки. Эта геометрическая интерпретация давала отрицательным числам полное признание. Наконец, смелое и широкое употребление Декартом и позднейшими учеными мнимых величин раскрыло их незаменимое практическое значение.

Заложив основу своей числовой алгебры, Декарт формулирует правила составления уравнений геометрических кривых: чтобы решить какую-либо задачу, нужно, считая её как бы решенной, обозначить буквами все как данные, так и искомые линии, после чего, заметив зависимость между ними, получить два выражения для одной и той же величины. Для получения требуемого уравнения остается приравнять полученные выражения друг другу. До-

казывается, что все геометрические задачи, решаемые с помощью циркуля и линейки, сводятся к решению уравнений не выше второй степени.

Общие правила применения новой алгебры к выводу уравнений кривых Декарт демонстрирует на примере решения задачи Паппа.

Приведем упрощенный и осовремененный вариант решения этой задачи. Пусть AB, AD, EF, GH суть прямые линии, заданные, как выражается Декарт, «по положению». Например, каждая из них может быть задана точкой и направлением (рис.7). Требуется найти геометрическое место точек C, обладающих следующим свойством: если провести от неё к данным прямым другие прямые, например CB, CD, CF, CH, образующие с данными прямыми заданные углы, то произведение одной части этих линий будет находиться в заданном отношении λ к произведению других, например, $CD \cdot CF = \lambda \cdot CB \cdot CH$. В частности, λ может равняться единице.

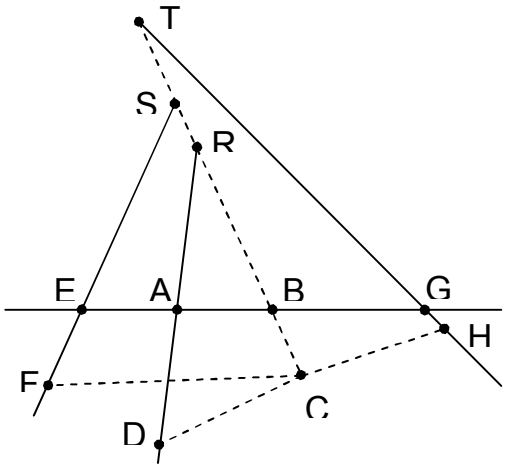


Рис. 7

Для решения этой задачи Декарт, предполагая точку C найденной, выбирает в качестве основных две прямые: AB и CB. Затем, продолжив все данные линии до пересечения с этими двумя, также продолженными, он обозначает длину отрезка AB буквой x, а длину отрезка BC буквой y. В соответствии с нашими современными представлениям прямая AB – ось абсцисс, точка A – начало координат, а ось ординат задана только своим направлением.

Потом Декарт доказывает, что каждый из отрезков CD, CF, CH линейно выражается через отрезки x и y. Для этого он рассматривает треугольник ABR, и так как все его углы заданы, отношение $AB:RB$ фиксировано и при заданном единичном отрезке выражено некоторым числом b, т. е. $AB:RB = b:1$. Так как $AB = x$, то $RB = \frac{x}{b}$, откуда $CR = CB + BR = y + \frac{x}{b}$.

Затем рассматривается треугольник CDR, и так как в нем заданы все углы, то отношение $CR:DC$ фиксировано и равно некоторому числу c. Отсюда $DC = \frac{CR}{c} = (y + \frac{x}{b}):c = \frac{y}{c} + \frac{x}{bc}$. Таким образом, отрезок DC линейно выражается через x и y : $DC = m_1 x + n_1 y$.

Аналогично, рассматривая систему треугольников с заданными углами, Декарт доказывает, что $FC = m_2 x + n_2 y + l_2$ и $CH = m_3 x + n_3 y + l_3$.

Учитывая, что по условию $CD \cdot CF = \lambda \cdot\cdot CB \cdot CH$ и подставив найденные значения, легко получить уравнение, связывающее переменные x и y. Оно имеет вид $(m_1 x + n_1 y)\cdot(m_2 x + n_2 y + l_2) = \lambda \cdot y \cdot (m_3 x + n_3 y + l_3)$ и, следовательно, является уравнением второй степени относительно x и y.

Далее Декарт пишет: «Если взять для y какую-нибудь известную величину, то останется только $xx = \pm ax \pm bb$, и, значит, величину x можно будет найти описанным выше образом при помощи циркуля и линейки. Придавая отрезку y последовательно бесконечное количество различных значений, мы найдем также бесконечное количество значений x и таким образом получим бесконечное количество различных точек, вроде той, которая обозначена C: они опишут требуемую кривую линию».

Вторая книга «Геометрии», названная Декартом «О природе кривых линий», посвящена более подробному рассмотрению кривых различных порядков, их классификации и выявлению их свойств. Анализируя работы древнегреческих математиков, Декарт прежде всего возражает против принятого ими разделения линий на геометрические и механические, описываемые с помощью приборов, – вроде конхоиды, циссоиды, спирали и квадратрисы. По его мнению, изгнание механизмов из геометрии нельзя объяснить их большей сложностью, чем линейка и циркуль. Геометрия преследует не точность чертежа, но лишь точность рассуждений, а последняя не меньше для многих линий, описываемых сложными инструментами, чем для кругов и прямых. Движение Декарта не отпугивает: он даже кладет его в основание учения о кривых. Кривые, которые он собирается употреблять в геометрии, получаются кинематически в предположении, что «две или несколько линий можно перемещать вдоль друг друга и что их пересечения образуют другую линию». Уточняя свой взгляд на природу линий, допустимых к изучению и использованию в геометрии (их он называл геометрическими), Декарт приходит к утверждению, что ими могут быть только кривые, построенные с помощью шарнирных механизмов, в которых движение первых звеньев полностью определяет движение остальных. Относительно их без доказательства он высказал утверждение, что каждая такая линия выразима алгебраическим уравнением. Доказан этот факт был только через сто сорок лет после выхода в свет «Геометрии» Декарта.

Сделав замечание, что степень уравнения кривой не зависит от выбора координат, но не доказав этого, Декарт классифицирует «геометрические» кривые не по степеням уравнений, как это через полвека стал делать Ньютон, а по «родам», относя к n-му роду кривые порядка 2n–1 и 2n. По-видимому, такой подход к классификации определялся, с одной стороны, желанием отнести к первому роду линии, детально изученные древнегреческими матема-

тики, а с другой, – связью геометрических линий с порождающими их шарнирными механизмами.

Заключительную часть второй книги составляют теоремы о проведении нормалей и касательных к алгебраическим кривым. Решение Декарта опиралось на метод неопределенных коэффициентов и отыскание двойного корня некоторого уравнения, соответствующего слиянию двух точек кривой в одну. Декарт провел таким способом нормаль к эллипсу, циссоиде и применил его также к выводу оптических свойств овалов.

В третьей книге «Геометрии», которую Декарт назвал «О построении телесных, или превосходящих телесные задач», довольно систематически и доступно излагаются полученные им, а отчасти другими учеными, важные результаты. Некоторые из них послужили отправными пунктами развития целых разделов алгебры. Заметим при этом, что символика «Геометрии» почти ни в чем не отличается от нашей. Неизвестные обозначаются буквами x, y, z; известные (положительные) величины – буквами a, b, c, а для степеней Декарт пользуется тем обозначением, которое ввел еще в «Правилах».

Изложение теории уравнений Декарт начинает с замечания, что их удобнее представлять с правой частью, равной нулю, а не записывая по обе стороны от знака равенства члены с положительными коэффициентами. Это было существенным новшеством, послужившим основой общих теорем о связи корней и коэффициентов, различных правил знаков для определения числа корней того или иного вида, способа неопределенных коэффициентов и некоторых других фактов. Далее Декарт рассматривает образование уравнений путем перемножения двучленов типа $x-a$ и убеждается в том, что уравнение имеет столько корней, какова его степень. Иногда, добавляет он, корни эти оказываются лишь воображаемыми. Тот же прием обнаруживает делимость многочлена на разность $x-a$, если a является его корнем. Вслед за этим излагаются знаменитое правило знаков Декарта, способ уничтожения второго члена в уравнении, способы изменения корней уравнений, превращение действительных корней в положительные. Здесь же дается новое решение уравнения четвертой степени, опирающееся на открытый Декартом метод неопределенных коэффициентов. Почти все излагается на примерах и не снабжено подлинными доказательствами. В большинстве случаев Декарт и не мог бы их дать при тогдашнем состоянии математики.

Все эти теоремы играли служебную роль, способствуя определению корней уравнений, служащих для решения задач. Именно последнее – главная цель алгебры. Здесь Декарт вновь обратился к геометрии. Он не вычислял корни, а строил их посредством пересечения кривых, причем стремился выбирать линии возможно низшего рода. Ему было известно, что две кривые

с уравнениями степени m и n позволяют найти корни некоторого уравнения степени mn.

Это вторичное использование геометрии определялось всем характером декартовой математики. Формул решения уравнений выше четвертой степени не имелось, и, как выяснилось много позднее, в общем случае их корни в радикалах вообще не выражаются. «Универсальная математика» должна была указать общий прием нахождения корня уравнения любой степени. Теоретически мыслимы были два пути. Одним являлось приближенное вычисление корня с любой степенью точности. Такого аналитического способа Декарт не знал. Но он его и не искал, ибо его полностью удовлетворял второй путь геометрического построения, соответствовавший определению числа как отрезка. Построение корней теоретически совершенно точно давало искомый отрезок. Основанием этого приема служила классификация кривых по их уравнениям в прямолинейных координатах, которая рассмотрена во второй книге «Геометрии».

3. Ферма и его аналитическая геометрия. Новые, в некотором смысле революционные, идеи в науке редко когда являются делом рук одного человека. Так и открытие (создание) аналитической геометрии не было единоличной заслугой Декарта. Почти одновременно с ним и совершенно независимо от него проблемой применения аналитического аппарата к геометрии занимался и другой гениальный французский математик Пьер Ферма (1601–1665).

Родился Ферма в торговой семье, проживавшей на юге Франции. Окончил университет и всю свою жизнь занимался в Тулузе юридической деятельностью. Математике отдавал всё свободное время. Был знатоком современной математики и классических сочинений древнегреческих математиков. Получил выдающиеся результаты в теории чисел, геометрии, методах оперирования с бесконечно малыми, оптике. Ферма не любил печатать свои сочинения, а сообщал о своих достижениях в научной переписке и при личном общении и дискуссиях со многими учеными. Поэтому подавляющее число выдающихся работ Ферма было опубликовано лишь после его смерти, в 1679 году, и позднее.

Идеи аналитической геометрии, то есть введение прямолинейных координат и приложение к геометрии алгебраических методов, сосредоточены в небольшом сочинении Ферма «Введение в теорию плоских и пространственных мест», ставшим известным с 1636 г., но напечатанным вместе с другими сочинениями лишь в 1679 году. Метод координат вводится так же, как у Декарта: задаётся одна ось – ось абсцисс, на ней откладываются от выбранного начала отрезки, соответствующие значениям одной переменной. Значения другой переменной, также изображаемые отрезками, восстанавливаются из конца первого отрезка под выбранным для данной задачи углом (чаще всего

прямым). Затем Ферма выводит уравнения прямой, окружности и всех конических сечений.

Замечательно, что Ферма рассматривает задачу и с другой стороны. Он исследует общие виды уравнений 1-й и 2-й степеней, преобразованием координат (перенос начала и поворот оси) приводит их к каноническим формам, облегчая тем самым их геометрическое толкование. Распространение аналитической геометрии на изучение пространственных геометрических мест Ферма проводил путем изучения пересечений поверхностей плоскостями. Однако пространственные координаты и у него еще отсутствуют, а аналитическая геометрия в пространстве остается незавершенной.

«Введение» Ферма не оказало такого влияния на дальнейшее развитие математики, как «Геометрия» Декарта. Этому мешало, прежде всего, то, что Ферма использовал алгебру Виете, плохо приспособленную для этих целей. Кроме того, к тому времени, когда было опубликовано «Введение» Ферма, уже появились другие работы, в которых алгебра Декарта была применена к результатам Аполлония, – прежде всего «Трактат о конических сечениях» Валлиса. Однако прогресс шел очень медленно, и даже в книге Лопиталя «Аналитический трактат о конических сечениях» (1707) мы находим немногим больше, чем перевод Аполлония на язык алгебры. Все эти авторы не решались допускать отрицательные значения для координат. Первым, кто смело обращался с алгебраическими уравнениями, был Ньютон в своем исследовании кривых третьего порядка (1703), а первую аналитическую геометрию конических сечений, вполне освободившуюся от Аполлония, мы находим только во «Введении» Эйлера (1748).

4. Влияние «Геометрии» Декарта на дальнейшее развитие математики. Декартова геометрия была весьма по-разному оценена современными ему математиками. Наряду с весьма высокими и лестными оценками было много критики. В ряде случаев критики отказывались признать новизну его идей. Указывалось, что учение о конических сечениях имелось у Аполлония, учение об уравнениях было отчасти развито в XVI веке. И все же новизна геометрии Декарта была несомненной. В ней была начата арифметизация геометрии, изучение её задач построено на буквенном исчислении и алгебре, в корне изменился подход к её проблемам и методам, которые действительно обновили науку и не столько завершили старый подход, сколько открыли современный.

Большую роль «Геометрия» Декарта сыграла в развитии понятия функции и в разработке аналитических способов её задания. В XVI веке и самом начале XVII века функциональные зависимости задавались словесно, графически, кинематически или таблично. После публикации «Геометрии» на пер-

вый план выдвинулись аналитические средства выражения зависимостей, которые на долгое время стали основными в математике и её приложениях.

Вначале круг аналитических выражений функций ограничивался алгебраическими уравнениями. Однако вскоре с открытием разложения функции в степенные ряды, к которым затем были добавлены другие виды бесконечных выражений – бесконечные произведения, непрерывные дроби, а ещё позднее – тригонометрические ряды и т.д., круг таких средств значительно расширился, что позволило распространить аналитическое представление на любые изучавшиеся в то время зависимости.

Приближенные вычисления и интерполирование явились той почвой, на которой выросла теория бесконечных рядов – одно из самых значительных созданий XVII века. Не без их влияния, в частности, Ньютон пришел к мысли об определяющей роли степенных рядов в его теории флюксий.

Вместе с тем следует иметь в виду, что творец аналитического направления в геометрии не довел до конца ее арифметизацию и еще мало использовал возможности алгебраического аппарата. Изучение свойств кривых по уравнениям не было даже начато. Не был создан и аппарат основных формул аналитической геометрии. Несовершенной являлась и сама координатная система. Координаты были неравноправны вследствие наличия только одной оси. Отсутствовало четкое различение знаков координат. Истолкование, данное Декартом отрицательным корням уравнений, не привело ни его, ни ближайших последователей к правилу знаков координат в различных четвертях. Уравнение кривой рассматривалось только в каком-либо одном координатном угле.

Главной слабостью декартовской методологии в области математики было непонимание необозримости открывавшихся в математике возможностей, возникавших по мере все более широкого использования инфинитезимальных методов. Считая, что построенная им «универсальная математика» решает все математические проблемы, Декарт, заканчивая вторую книгу «Геометрии», писал: «Я полагаю теперь, что ничего не пропустил из начал, необходимых для познания кривых линий». Вера Декарта в универсальность своего метода была обусловлена метафизическим характером его мышления. Все познаваемые математические задачи приводились к единому и всеобъемлющему методу алгебры. Построения более общей теории он не мыслил.

Некоторую неудовлетворенность в созданном им математическом методе Декарт, видимо, начал испытывать после издания «Геометрии». В 1638 году Декарт встретился с множеством задач, не подчинявшихся его методу. Хотя он и решал некоторые задачи инфинитезимальными методами, иногда не осознавая этого, ему не пришлось здесь сыграть ту же основоположную роль, что в алгебре и геометрии, но отдельные его результаты содействовали

подготовке открытия дифференциального и интегрального исчислений и кое в чем предварили Ньютона и Лейбница.

5. Задачи на квадратуры и касательные. Выход в свет «Геометрии» Декарта не только не уменьшил интерес и внимание к инфинитезимальным методам, но придал им новый импульс и новое направление. К концу первой половины XVII века наряду с методом неделимых все чаще стал использоваться метод интегральных сумм. Большой вклад в уточнение метода неделимых и разработку методов интегральных сумм внесли Ферма и Паскаль.

Блез Паскаль (1623–1662) – французский философ, писатель, математик и физик – родился в семье высокообразованного юриста, занимавшегося математикой. Рано проявил выдающиеся математические способности, войдя в историю науки как классический пример отроческой гениальности. Первый математический трактат Паскаля «Опыт о конических сечениях» (1640), являвшийся развитием трудов Дезарга, содержал одну из основных теорем проективной геометрии – теорему Паскаля. В 1641–1642 годах Б. Паскаль сконструировал суммирующую машину, прообраз арифмометра, а к 1654 году закончил ряд работ по арифметике, теории чисел, алгебре и теории вероятностей. Круг математических интересов Паскаля был весьма разнообразен. Паскаль построил общий алгоритм для нахождения признаков делимости любого целого числа на любое другое целое число, способ вычисления биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля), сформулировал ряд основных положений элементарной теории вероятностей. Труды Паскаля, содержащие изложенный в геометрической форме метод решения задач на вычисление площадей фигур, объемов и поверхностей тел, явились существенным вкладом в развитие анализа бесконечно малых.

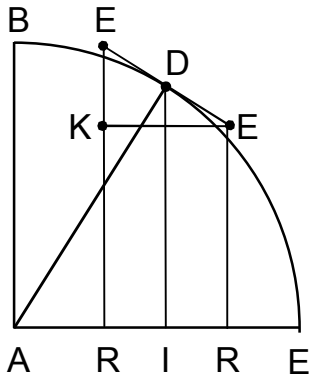


Рис. 8

Хорошо знакомый с воззрениями и трудами как сторонников метода неделимых, так и его критиков, Паскаль не отказывался от терминов вроде «сумма линий», или «сумма ординат», или «сумма нескончаемого множества линий», но всегда понимал под ними интегральные суммы. В сборнике «Письма А. Деттонвиля о некоторых его геометрических открытиях», опубликованном в 1659 году, Паскаль последовательно проводит эту концепцию. При этом он настойчиво подчеркивает необходимость явно указывать, на какие равные и неограниченно малые «части» прямой или кривой умножаются линии, если только выбор «частей» не является в данной задаче «естественным». В частности, вводя сумму всех синусов, Паскаль определял ее как сумму произведений ординат на элементы дуги (в современных обозначениях $\sum \sin \kappa d\varphi$). Для этого он прежде всего доказал лемму о ли-

нии синуса. Выбрав на дуге первой четверти круга радиуса r произвольную точку D, Паскаль строит треугольник EKE, где EE – отрезок касательной, а DI – линия синуса (рис. 8). Пусть вас не удивляет обозначение концов отрезка одной и той же буквой, в то время еще не пользовались индексами, и к такому приему часто прибегали математики XVII века, особенно при обозначении очень малых отрезков. Этот треугольник подобен треугольнику ADI, и стороны его остаются в постоянном отношении $DI : AD = KE : EE$, сколь бы малыми их ни брать. Поэтому $DI \cdot EE = AD \cdot KE = AD \cdot RR$.

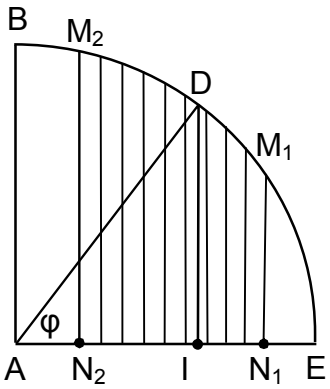


Рис. 9

Если теперь какую-либо дугу окружности, например дугу M_1M_2 (рис.9), разделить на равные сколь угодно малые части DD и просуммировать обе части предыдущего равенства, заменяя отрезки касательных EE «равными» им дугами DD, то окажется, что сумма синусов DI, умноженных на дугу DD, равна отрезку N_1N_2 между основаниями крайних синусов, умноженному на радиус AD. $\left(\sum DI\right) \cdot DD \approx N_1N_2 \cdot AD$.

С увеличением количества частей, на которые делится дуга M_1M_2, увеличивается количество линий синуса, и, следовательно, растет их сумма $\sum DI$, и в то же время уменьшается длина элемента дуги DD, а их произведение все точнее приближается к произведению $N_1N_2 \cdot AD$, которое не зависит от количества точек деления.

Если радиус AD положить равным единице, дугу DE обозначить φ, дуги EM_1 и EM_2, соответственно, φ_1 и φ_2, элемент дуги DD символом $d\varphi$, а отрезки AN_1 и AN_2 – $\cos\varphi_1$ и $\cos\varphi_2$, то в современных обозначениях получим $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi\, d\varphi = \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2$. При помощи этого геометрического эквивалента определенного интегрирования Паскаль сумел разрешить много задач на определение площадей, объемов, статических моментов и т.д.

В доказанной лемме Паскаль впервые ввел треугольник EKE, послуживший впоследствии Лейбницу прообразом дифференциального треугольника, составленного из дифференциалов *dx*, *dy*, *ds*.

Важное усовершенствование геометрических квадратур было проделано Ферма, который ввел деление фигуры ординатами, отстоящими друг от друга на неравные расстояния. Это метод он применил при вычислении площади криволинейной трапеции, заданной на отрезке $[0, x]$ и ограниченной сверху дугой $y = x^{p/q}$.

Разделив интервал интегрирования точками с координатами $x_1 = x,\ x_2 = \alpha x,\ x_3 = \alpha^2 x. \ldots,\ x_n = \alpha^{n-1}x,\ x_{n+1} = \alpha^n x,\ldots$, где $\alpha < 1$, Ферма получил последовательность точек, сгущающуюся по мере приближения к нулю (рис.10). Длины отрезков, на которые оказался разбитым интервал интегрирования, пронумерованные справа налево, будут равны $\Delta_n x = a^{n-1}x - a^n x = a^{n-1}(1-\alpha)x$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ldots.$ Ординаты в точках деления будут $y_n = \left(\alpha^{n-1}x\right)^{\frac{p}{q}} = \alpha^{(n-1)\frac{p}{q}} x^{\frac{p}{q}}$, $n = 1,2,3,\ldots$ Тогда площадь $n-го$ прямоугольника

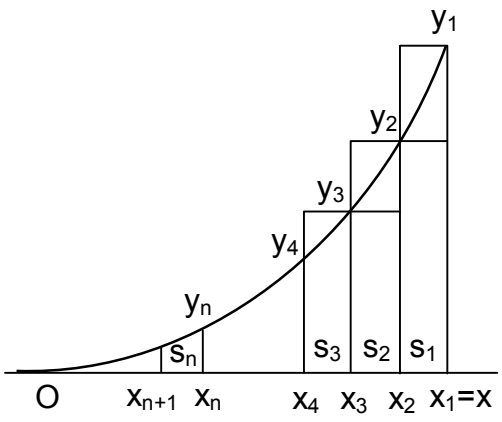


Рис. 10

$$S_n = y_n \Delta_n x = \alpha^{(n-1)\frac{p}{q}} x^{\frac{p}{q}} \alpha^{n-1}(1-\alpha)x = (1-\alpha)\alpha^{(n-1)\frac{p+q}{q}} x^{\frac{p+q}{q}},$$ а площадь всей криволинейной трапеции приближенно равна $S = \sum_n S_n = (1-\alpha)x^{\frac{p+q}{q}} \sum_n \alpha^{(n-1)\frac{p+q}{q}}$.

Так как сумма бесконечно убывающей прогрессии $\sum_n \alpha^{(n-1)\frac{p+q}{q}}$ равна $\frac{1}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}}$, то $S = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} \cdot x^{\frac{p+q}{q}}$. Положив $\alpha = \beta^q$, получим $\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}} = \frac{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{q-1}}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{p+q-1}}$. при $\alpha \to 1$ $\beta \to 1$, откуда $\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} \to \frac{q}{p+q}$. и окончательно $S = \frac{q}{p+q} \cdot x^{\frac{p+q}{q}}$.

В современных обозначениях $\int_0^x x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{p+q} \cdot x^{\frac{p+q}{q}}$.

В математике XVII века наряду с задачами на вычисление площадей поверхностей, объемов тел, спрямление кривых линий и нахождение центров тяжести все больше внимания стали уделять задачам на построение касательных, нахождение экстремальных значений, вычисление скоростей, которые вели к идеям, понятиям и методам, составляющим элементы будущего дифференциального исчисления. При их решении наряду с инфинитезималь-

ными методами, использовавшимися еще Архимедом, пользовались механическими соображениями и алгебраическими методами.

Уже в школе Галилея касательная рассматривалась как диагональ параллелограмма, сторонами которого являлись горизонтальная и вертикальная составляющие скорости. Учитывая, что тяжелая точка, брошенная горизонтально, при падении на Землю движется по параболе, Торричелли разработал прием построения касательной к ней. Несмотря на важность кинематического метода, он был очень неудобен, так как исходил из индивидуальных особенностей кривых и поэтому был недостаточно алгоритмичным.

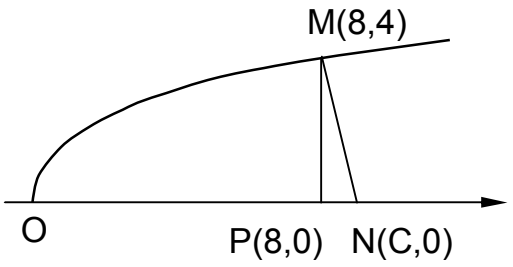


Рис. 11

Более перспективным для построения касательных и нормалей в то время представлялся метод нормалей Декарта, изложенный во второй книге его «Геометрии». Мы здесь ограничимся примером применения этого метода при построении нормали к параболе $y^2 = 2x$ в точке $M(8,4)$. Обозначим точку пересечения этой нормали с осью абсцисс точкой $N(c,o)$ (рис.11). Семейство концентрических окружностей с центром в точке $N(c,o)$ содержит одну окружность радиуса $R = \sqrt{(8-c)^2 + 4^2}$, которая имеет с параболой $y^2 = 2x$ две общие точки, слившиеся в одну, именно точку $M(8,4)$. Уравнение этой окружности имеет вид: $(x-c)^2 + y^2 = (8-c)^2 + 4^2$. Решив его совместно с уравнением параболы $y^2 = 2x$ и перенеся все члены в левую часть, получим уравнение $(x-c)^2 + 2x - (8-c)^2 - 4^2 = 0$, которое содержит двукратный корень $x = 8$, и, следовательно, его левая часть должна делиться на $(x-8)^2$. Так как делимый многочлен имеет вторую степень относительно x, а его коэффициент при x равен единице, то $(x-c)^2 + 2x - (8-c)^2 - 4^2 = (x-8)^2$.

Приравнивая коэффициенты при x, получим $2c - 2 = 16$, откуда $c = 9$, что позволяет построить нормаль, а, следовательно, и касательную в точке $M(8,4)$ к параболе $y^2 = 2x$.

Вскоре после выхода «Геометрии», в которой Декарт изложил свой метод построения нормалей к алгебраическим линиям, Ферма послал Декарту и Роберваль через Мерсена небольшое сочинение «Метод отыскания максимумов и минимумов», в котором изложил свой прием, пригодный для нахождения как экстремумов, так и нормалей.

Для нахождения экстремумов целого алгебраического многочлена (обозначим его современным символом $f(x)$) Ферма составлял выражение $f(x+h)$, после чего, написав приближенное равенство $f(x+h)\approx f(x)$, уничтожал в нем равные члены. После этого, произведя сокращение на возможно высокую степень h и отбросив члены, еще содержащие множитель h, Ферма решал возникающее уравнение относительно x. Полученные значения сообщали функции $f(x)$ максимальное или минимальное значение.

Свой метод он применил для деления заданного отрезка на две части так, чтобы построенный на них прямоугольник имел наибольшую площадь. Пусть длина данного отрезка равна a. Обозначив длину одной из двух его частей буквой x, получим, что площадь прямоугольника будет равна $S(x)=x\cdot(a-x)$. Применяя правило Ферма, запишем: $S(x+h)=(x+h)\cdot(a-x-h)$ и, составив уравнение $(x+h)\cdot(a-x-h)\approx x\cdot(a-x)$, последовательно получим $ax-x^2-xh+ah-hx-h^2\approx ax-x^2$, откуда после уничтожения подобных членов и сокращения на h получим уравнение $-x+a-x-h\approx 0$. Отбросив h, получим $x=\frac{a}{2}$, откуда следует, что наибольшую площадь будет иметь квадрат.

Свой метод, правда, уже в другой статье, Ферма обосновал следующим образом:

если $f(x)$ имеет значение максимума при $x=a$, то для всех достаточно малых $h>0$ одновременно $f(a+h)<f(a)$ и $f(a-h)<f(a)$, или, что то же,

$$f(a+h)-f(a)=f_1(a)h+f_2(a)h^2+f_3(a)h^3\cdots<0,$$
$$f(a-h)-f(a)=-f_1(a)h+f_2(a)h^2-f_3(a)h^3+\cdots<0.$$

Так как при достаточно малом h и $f_1(a)\neq 0$ знак левой части совпадает со знаком первого члена, то для одновременного выполнения обоих неравенств необходимо выполнение равенства $f_1(a)=0$. В предположении $f_2(a)\neq 0$ из аналогичных соображений следует, что при $f_2(a)<0$ максимум действительно имеет место. Точно также выясняется, что при $f_1(a)=0$ и $f_2(a)>0$ имеет место минимум.

Обращаясь к вопросу построения касательных, Ферма далее пишет: «Отыскание касательных в данных точках каких-либо кривых мы приводим к вышеизложенному методу». В этом случае Ферма не дает общего правила, ограничиваясь только примером построения касательной TM в точке M параболы $y^2=k\cdot x$ путем отыскания отрезка подкасательной TX (рис. 12). Явного определения понятия касательной здесь нет; фактически имеется в виду, что дуга кривой в некоторой окрестности её общей точки с касательной ле-

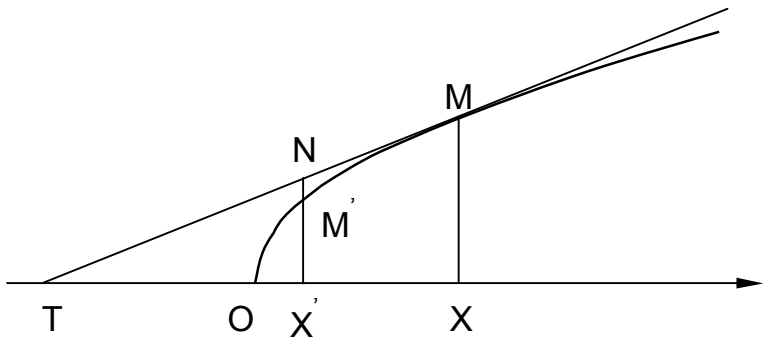


Рис. 12

жит по одну её сторону. Если слева от ординаты точки M провести ординату другой точки параболы M', то свойство параболы, подобие треугольников TXM и $TX'N$, а также неравенство $X'M' < X'N$ дают $\frac{OX}{OX'} = \frac{XM^2}{X'M'^2} > \frac{XM^2}{X'N^2} = \frac{TX^2}{TX'^2}$.

Отсюда, обозначив $OX = x$, $OX' = x - h$, $TX = t$, $TX' = t - h$, получим, что $\frac{x}{x-h} > \frac{t^2}{(t-h)^2}$ или $t^2h + xh^2 > 2txh$. Теперь Ферма производит «приравнивание», под которым он понимал замену неравенства равенством, сокращает на h и затем опускает член xh. В итоге он получает, что подкасательная $t = 2x$.

Существенный вклад в создание дифференциального и интегрального исчисления внес профессор Кембриджского университета Исаак Барроу (1630–1677), лекции которого посещал Ньютон, будучи студентом этого университета. Не имея достаточного времени, чтобы рассмотреть математические работы Барроу и их влияние на дальнейшее использование инфинитезимальных методов, отметим только два момента.

Во-первых, Барроу при решении задач на касательные в отличие от Ферма вводит стандартные обозначения не только для приращения абсциссы, но и для приращения ординаты. Первое из них он всегда обозначал буквой e, второе – буквой a. Так, например, рассматривая касательную TM к кривой AMN в точке M (рис. 13) и принимая отрезок дуги MN безгранично малым, Барроу строит бесконечно малый треугольник NRM, подобный конечному треугольнику TPM.

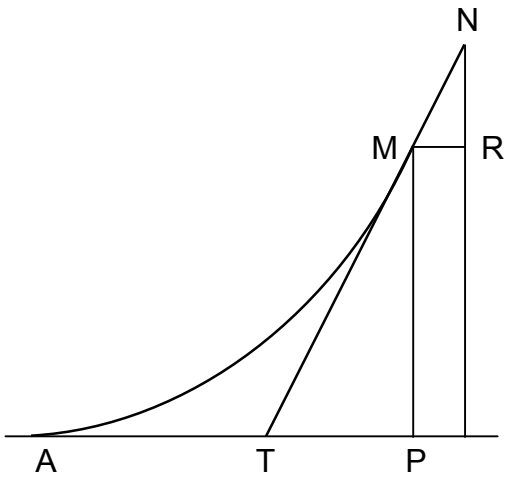


Рис. 13

Обозначив MP = m, TP = t, NR = a и MR = e, он формулирует свое правило следующим образом: для построения подкасательной, а, следовательно, и касательной к кривой, заданной либо уравнением $y = f(x)$, либо уравнением $F(x.y) = 0$, надо написать уравнение кривой в приращенных координатах $y + a = f(x + e)$ либо в виде $F(x + e.y + a) = 0$, после чего в нем отбросить все члены выше первого измерения относительно a и e, а также члены, сво-

бодные от a и e. После этого, заменив в получившемся уравнении a на m (ордината) и e на t (подкасательная), выразить длину подкасательной через другие параметры.

Так, например, для кривой $y = x^2$ процедура Барроу даёт:

$$y + a = (x + e)^2, \quad y + a = x^2 + 2ex + e^2, \quad y + a = x^2 + 2ex, \; a = 2ex, \quad m = 2xt$$

,

откуда подкасательная $t = \frac{m}{2x}$, где m – ордината.

Во-вторых, Барроу доказал взаимную обратность задач на нахождение площадей и задачами на построение касательных. Отмечена эта связь была уже давно, квадратура парабол ставила в соответствие функции x^m (ординате) функцию $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ (площадь), а определение касательных к ним ставило в соответствие функции $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ (ординате) функцию x^m (отношение ординаты к подкасательной).

Большую роль в понимании этой связи играли так называемые обратные задачи на касательные, часто возникающие при решении задач мореплавания, оптики и кинематики. Задачи этого типа состоят в определении кривой, исходя из заданного общего свойства всех касательных к ней. Речь идет не о нахождении огибающих семейства прямых, а о таких свойствах касательных, которые зависят от положения точки касания. В общей постановке задачи этого типа можно формулировать так: найти $y = f(x)$ из условия $F(x, y, y') = 0$. Таким образом, речь идет о необходимости решить дифференциальное уравнение первого порядка с двумя переменными.

К механическому или геометрическому представлению зависимости между дифференцированием и интегрированием подходили Торричелли, Менголи, Грегори. Наиболее полное и строгое доказательство этой связи дал Барроу. В частности, он доказал общее утверждение, которое мы сформулируем с использованием современных обозначений: пусть решается задача на нахождение площади криволинейной трапеции на отрезке $[0, x]$, ограниченной сверху функцией $f(x)$. Подчеркивая зависимость этой площади от переменной x, мы обозначим её $S(x)$. Кривую $S(x)$, выражающую эту зависимость, в те годы называли квадратрисой. Если теперь требуется построить касательную к квадратрисе $S(x)$, то, как показал Барроу, подкасательная $t(x)$ будет равна отношению $\frac{S(x)}{f(x)}$, откуда следует, что $\frac{S(x)}{t(x)}$ (в наших обозначе-

ниях производная $\frac{dS}{dx}$) равна $f(x)$. В современных курсах анализа этому утверждению соответствует теорема о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом.

6. Степенные ряды. Важную роль в формировании основ математического анализа сыграла разрабатываемая в эти годы теория степенных рядов. Математики XVI и начала XVII веков испытывали огромные трудности при выполнении практических вычислений. Прежде всего, при составлении тригонометрических таблиц. Другой задачей являлось отыскание простых и надежных алгоритмов численного определения корней уравнений с данными числовыми коэффициентами. Арифметические средства вычислений ограничивались операциями с целыми числами и простыми дробями. Десятичные дроби в Европе были введены только в 1585 году фламандским инженером и математиком Стивеном (1548 – 1620) в сочинении «Десятая» и только начали осваиваться математиками. Все вычисления выполнялись вручную.

При вычислении тригонометрических таблиц пользовались окружностью радиусом $r = 10^{10}$, что позволяло обходиться без дробей. Над вычислением таблиц в те годы успешно работали Коперник, Виет, Кеплер и его сотрудник И. Бюрги (1552–1632). Главные заботы вызывало определение с особенно высокой точностью синусов (или хорд) малых дуг, чтобы на вычислениях не сказывалось накопление ошибок. Для этого использовали унаследованный от древнегреческих математиков прием последовательного удвоения сторон правильного вписанного многоугольника. Виет, например, для вычисления $\sin 1'$ рассмотрел многоугольник с $3x2^{11,}$ сторонами, а описанного – с $3x2^{12}$ сторонами. При этом в качестве сопутствующего результата находили приближенные значения числа π со все возрастающей точностью.

Большую роль в совершенствовании вычислений сыграло изобретение в начале XVII века логарифмов. В их основе лежала замеченная еще Архимедом связь между арифметической и геометрической прогрессией: для последовательности степеней $a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots$ $a^m a^n = a^{m+n}$. Аналогичные мысли высказывал Диофант. Орезм исходил из этой идеи, когда вставлял в последовательность показателей степени дробные числа и обобщал тем самым понятие показателя степени на дробные величины. Штифель систематически сравнивал действия над степенями и их показателями и ввел дробные и отрицательные показатели степени.

Чтобы использовать эту идею для сведения умножения к сложению, Бюрги составил таблицу

$10^8 \cdot 1{,}0001^0$	$10^8 \cdot 1{,}0001^1$	$10^8 \cdot 1{,}0001^2$	$10^8 \cdot 1{,}0001^3$	$10^8 \cdot 1{,}0001^4$	$10^8 \cdot 1{,}0001^5$
0	10	20	30	40	50

Числа нижнего ряда были напечатаны красной краской и назывались красными числами; числа верхнего ряда – черной краской и назывались черными числами. Таким образом, в таблице И. Бюрги красные числа представляют собой логарифмы черных, разделенных на 10^8 при основании 1,0001. Вычисления черных чисел (благодаря множителю 10^8) доводились до девятого знака. Бюрги довел их до так называемого полного черного числа, равного 10^9. Соответствующее ему полное красное число, найденное с применением интерполяции, оказалось равным 230270022, т.к.$1{,}0001^{230270022}=10$. Из этого видно, какое громадное количество последовательных вычислений пришлось проделать Бюрги при составлении своей таблицы, на которую он потратил около 8 лет.

Метод сравнения прогрессий дает последовательность дискретных значений. Их можно, не испытывая принципиальных трудностей, сгустить, но их дискретный характер не изменится. Неотъемлемой частью этого метода является интерполяция.

В 1614 г. Джон Непер (1550–1617) разработал восьмизначные таблицы логарифмов тригонометрических функций для значений аргументов от 0 до 90^0 через одну минуту градусного деления. При её построении он исходил из сопоставления двух непрерывных движений по двум непрерывным шкалам. В процессе решения чисто вычислительной задачи составления таблиц возникли элементы анализа переменных величин. Это были: идея логарифмической функции, высказанная Непером, и отбрасывание несущественно малых величин, например у Брига. Последний прием, можно предположить, послужил одним из побудительных мотивов появления у Кеплера исчисления актуальных бесконечно малых величин. В свою очередь применение элементов анализа бесконечно малых дало новый, более удобный способ вычисления логарифмов. Его разработал в 1667 г. член Лондонского королевского общества Кауфман (1620–1687), известный под именем Н. Меркатора. Доказав, что площадь под кривой $y=\frac{1}{1+x}$ на интервале (0, x) равна $\ln(1+x)$ и разложив простым делением, дробь $y=\frac{1}{1+x}$ в степенной ряд $1-x+x^2=x^3+\ldots$, Меркатор, воспользовавшись разработанными к его времени методами квадрирования степенной функции, получил важное равенство $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$.В результате математики получили возможность вычислять значения логарифмической функции с помощью степенного ряда.

Теория логарифмических функций получила свое завершение в трудах Л. Эйлера (1707–1783). Ему принадлежит общее определение логарифмической и показательной функции как взаимообратных, распространение поня-

тия логарифма на случай комплексного аргумента, введение символа *e* для основания натурального логарифма и т. д.

Разложение в ряд логарифма было не единственным примером употребления степенных рядов. Многочисленные другие разложения открыл талантливый шотландский математик Джемс Грегори (1638–1675), в частности, им было получено разложение в степенной ряд тангенса и его логарифма. Историки предполагают, что ему было известно правило, полученное позже Тейлором и Маклореном.

Завершая разговор об использовании степенных рядов, заметим, что, когда речь шла о приближенном вычислении отдельной конкретной величины, принимали во внимание сходимость к ней ряда и искали оценки аппроксимации. Здесь дело было не только и даже не столько в античной традиции строгости, сколько в существе расчетных задач и возможности установления соответствующих неравенств. Но когда переходили к операциям над буквенными рядами, то на них, как правило не задумываясь, переносили приемы действий над конечными алгебраическими многочленами.

Лекция 13. Создание математического анализа

План лекции:

1. Исчисление флюксий Ньютона.
2. Дифференциальное и интегральное исчисление Лейбница.
3. Первые ученики и последователи Лейбница.
4. Другие разделы математики, разрабатывавшиеся в XVII веке.

1. Исчисление флюксий Ньютона. К началу второй половины XVII века было не только разработано большое число различных приемов решения задач на касательные, включающие задачи на отыскание экстремумов и вычисление квадратур, но и доказана взаимная обратимость этих приемов. Однако отсутствовал общий метод, позволяющий распространить исследования, ограниченные преимущественно целыми алгебраическими функциями, на любые дробные и иррациональные и особенно на трансцендентные функции. Для дальнейшего движения вперед по пути к дифференциальному и интегральному исчислению нужно было свести частные и разрозненные приемы в единую систему взаимно связанных понятий анализа, выраженных в специальной символике, позволяющей производить действия с бесконечно малыми по правилам определённого алгоритма.

Решили эту проблему два великих ученых: Исаак Ньютон (1643–1727) и Готлиб Лейбниц (1646–1716). Шли они к этой цели разными путями и создали независимо друг от друга две по форме различные, а по существу эквивалентные системы математического анализа: И. Ньютон – исчисление флюксий, а Г. Лейбниц – дифференциальное и интегральное исчисление.

Исаак Ньютон родился в 1643 году в семье мелкого фермера. Его отец умер незадолго до рождения сына. После окончания школы в 1661 году он поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета в качестве субсайзера (так назывались бедные студенты, совмещающие учебу с выполнением различных мелких услуг ради заработка). Первые два года он посвятил элементарной математике и изучению трудов Декарта и Валлиса. На третьем году обучения ему довелось слушать лекции по математике И. Барроу.

Нашествие великой чумы в 1664–1665 годах и её слабые вспышки в следующем году предоставили Ньютону вынужденный досуг. Университет был закрыт, и в течение почти двух лет он прожил в своей родной деревне, лишь ненадолго приезжая в Кембридж. Судя по дневниковым и черновым записям, сохранившимся с тех пор, эти годы были необычайно продуктивными в научном творчестве Ньютона. Во всяком случае, именно в эти годы он пришел к идеям, приведшим его к великим открытиям. Тогда уже ему стал ясен общий характер закона всемирного тяготения, подтверждение которого Ньютон

находил в третьем законе Кеплера. В этот же период Ньютон проводил опыты по разложению света и разрабатывал идею зеркального телескопа, который он собственноручно изготовил в 1668 году.

В эти же годы он сделал и свои важнейшие математические открытия: распространение формулы бинома на степени с дробными и отрицательными показателями и связанное с этим широкое применение бесконечных рядов, прямое и обратное исчисление флюксий, приведшее к совершенно новому и систематическому нахождению квадратур и построению касательных. Однако публиковать их он долгие годы воздерживался. Так, о своём разложении степени бинома, найденном зимой 1664–1665 годов, Ньютон впервые написал лишь через 12 лет во втором письме к Ольденбургу для Лейбница. Из этого письма следовало, что, изучая «Арифметику бесконечных» Валлиса, Ньютон занялся интерполированием площадей кривых $y=\left(1-x^2\right)^{n/2}$, но не на отрезке $[0;1]$, как это делал Валлис, а на отрезке $[0;x]$, что соответствует нашему интегралу с переменным верхним пределом. При этом Ньютон вскоре заметил, что наиболее простой закон образования членов ряда получается, если разлагать в ряд не площадь криволинейной трапеции, а ограничивающую её кривую. Опираясь на мультипликативное свойство коэффициентов бинома $(a+b)^m$ при целых положительных m, знакомое до него Ферма и Паскалю, Ньютон предположил его справедливость и в том случае, когда m – дробное или отрицательное число. Это предположение привело его к установлению общей биномиальной формулы

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}\cdot x+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}\cdot x^k+\ldots,$$

справедливость которой он проверил для нескольких отрицательных и дробных значений α. Например, при $\alpha=-1$ получается ряд $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots$, который можно получить для проверки делением единицы на $1+x$.

По-видимому, понимая недостаточную обоснованность обобщенной формулы бинома, Ньютон в ряде случаев, разлагая величину в степенной ряд, обращается не к ней, а оперирует степенными рядами как многочленами, используя метод неопределенных коэффициентов, притом значительно шире, чем Декарт. Широко пользовался Ньютон и разработанным им методом обращения рядов, в соответствии с которым, располагая разложением величины y в ряд по степеням x, он находил разложение x по степеням y. Комбинирование этих и некоторых других приемов доставляло Ньютону и его единомышленникам много новых разложений.

Считая математику важнейшим орудием физических изысканий, Ньютон особое значение придавал методу бесконечно малых, которому он при-

дал форму исчисления флюксий. Свои основные идеи по разработке нового исчисления, также зародившиеся в период с 1665 по 1667 годы, Ньютон изложил в работе «Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов», написанной в 1669, а опубликованной лишь через 42 года, в 1711 году.

В этой работе приведены три правила, на основе которых строится ньютоновский вариант исчисления бесконечно малых.

Правило 1. Если $y = ax^{m/n}$, где m и n целые числа, то площадь соответствующего сегмента параболы Z на отрезке $[0, x]$ равна $\frac{an}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}}$.

Правило 2. Квадратура суммы равна сумме квадратур. Площади, лежащие под осью абсцисс, выражаются отрицательными числами.

Правило 3. Для квадратуры всех остальных алгебраических кривых их ординаты надо выразить суммами бесконечных степенных рядов, «причем действовать над буквами следует совершенно таким же образом, как действуют в арифметике, когда делят, извлекают корни или решают уравнения, пользуясь десятичными дробями».

Рассмотрим вывод первого из этих правил, несколько осовременив изложение.

Если площадь Z криволинейной трапеции ABD (рис. 14) равна: $\frac{na}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}}$, где m/n – рациональная дробь, то уравнение кривой $AD\delta$, ограничивающей трапецию, будет $y = a \cdot x^{m/n}$.

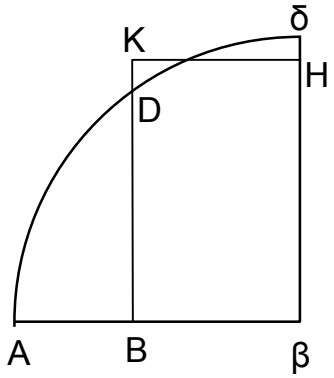


Рис. 14

Доказательство Ньютон ведет в основном аналитическими средствами, сопровождая их чертежом.

Увеличим значение x на отрезок $B\beta = o$ (знаком o Ньютон пользовался еще осенью 1664 года для обозначения бесконечно убывающей или, как он иногда выражался, «исчезающей» величины, которую он позже назовет «моментом»). Тогда площадь увеличится на величину $BD\delta\beta$ или на прямоугольник $BKH\beta = o \cdot \upsilon$, где υ – некоторая промежуточная ордината кривой. Обозначив $na/(m+n) = c$ и $m+n = p$, Ньютон переписывает выражение для площади $z = \frac{na}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}}$ в виде $z = cx^{\frac{p}{n}}$. Возведя обе части в степень n, получим $z^n = c^n x^p$. Затем, подставив вместо x $x + o$, вместо z $z + o\upsilon$, получим равенство $(z + o\upsilon)^n = c^n (x + o)^p$, откуда $z^n + n \cdot o\upsilon \cdot z^{n-1} + \ldots = c^n \left(x^p + p \cdot o \cdot x^{p-1} + \ldots\right)$, Ньютон отбрасывает в нём чле-

ны, обозначенные многоточием, «которые, в конце концов, исчезают», и получает равенство $z^n + n \cdot o\upsilon \cdot z^{n-1} = c^n\left(x^p + p \cdot o \cdot x^{p-1}\right)$. Отбросив в нем равные члены z^n и $c^n x^p$ и разделив обе части оставшегося равенства на o, получает равенство $n \cdot \upsilon \cdot z^{n-1} = c^n \cdot p \cdot x^{p-1}$.

Заменив υ равным ему (при «исчезании» o) y-ом, и вернувшись к прежним обозначениям, после очевидных тождественных преобразований получим, что $y = ax^{m/n}$.

«Поэтому и обратно, – заключает Ньютон, – если $ax^{m/n} = y$, то $\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Что и требовалось доказать».

Так впервые был предложен читателям аналитический вывод значения интеграла $\int_0^x x^k dx$, при $k \neq -1$, посредством дифференцирования степенной функции.

В этом же труде Ньютон изложил метод численного решения алгебраических уравнений (метод Ньютона), а также метод нахождения разложения неявных функций в ряд по дробным степеням аргумента. Метод вычисления и изучения функций их приближением бесконечными рядами приобрел огромное значение для всего математического анализа и его приложений.

В 1668 году Ньютону была присвоена степень магистра, а в 1669 Исаак Барроу передал ему руководство кафедрой, которую Ньютон занимал до 1701 года. В 1671 он построил второй зеркальный телескоп, бóльших размеров и лучшего качества. Демонстрация телескопа произвела сильное впечатление на современников, и вскоре после этого Ньютон был избран (в январе 1672) членом Лондонского королевского общества, а в 1703 стал его президентом.

В 1670–1671 гг. Ньютон завершил работу над сочинением «Метод флюксий и бесконечных рядов», в котором разработанное им исчисление получило более полное развитие, причем основные понятия и задачи формулировались в механических терминах. Издано оно было лишь в 1736 году, уже после смерти Ньютона.

В исходных понятиях и терминологии метода флюксий отразилось влияние кинематических идей, восходящих к натурфилософским школам XVI века и по-новому развитых целым рядом учёных XVII века. В качестве всеобщего аргумента И. Ньютон принял время. Систему величин υ, x, y, z, одновременно изменяющихся непрерывно в зависимости от времени, он назвал флюентами, а скорости, с которыми изменяются флюенты, – флюксиями. Их он обозначал теми же буквами, что и соответствующие флюенты, над

которыми ставились точки, например $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Таким образом, в нашей терминологии флюксии являются производными флюент.

Как уже отмечалось выше, бесконечно малые («исчезающие») изменения независимой переменной (времени) Ньютон называл «моментами» и обозначал греческой буквой омега o. Моментами флюент и флюксий Ньютон называл, соответственно, произведения $x \cdot o$ и $\dot{x} \cdot o$ Понятию момента флюксии в современной терминологии соответствует понятие дифференциала.

В «Методе флюксий и бесконечных рядов» Ньютон формулирует две основные взаимно-обратные задачи анализа:

1) определение скорости движения в данный момент времени по известному пути, или определение соотношения между флюксиями по данному соотношению между флюентами;

2) определение пройденного за данное время пути по известной скорости движения, или определение соотношения между флюентами по данному соотношению между флюксиями.

Иллюстрируя процесс решения первой из этих двух задач, Ньютон рассматривает уравнение $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, выражающее зависимость между флюентами x и y. Подставив $x + \dot{x} \cdot o$ вместо x и $y + \dot{y} \cdot o$ вместо y, Ньютон получает

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}o\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2a x\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o +$$
$$+ axy + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o + ax\dot{y}o - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}o\dot{y}o - \dot{y}^3o^3 = 0.$$

Но, согласно допущению, $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, и после исключения этого уравнения и деления остающихся членов на момент о у него остается $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} + 3x\dot{x}o - a\dot{x}\dot{x} + a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}\dot{y}o + \dot{x}^3oo - \dot{y}^3oo = 0$.

«Но поскольку нуль мы считаем бесконечно малым, так что он может представлять моменты количеств, то члены, которые умножены на него, суть ничто по сравнению с остальными; поэтому я, – пишет далее Ньютон, – отбрасываю их, и у нас остается $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$».

Судя по всему, этот последний шаг – отбрасывание моментов – доставляло Ньютону немало беспокойства и вызывало у тех, кто знакомился с исчислением флюксий, неизменные вопросы. Являются ли символы «o» нулями, или актуально бесконечно малыми, или это конечные числа? Можно ли величину, вначале не равную нулю, в конце рассуждения полагать равной нулю? Пытаясь разъяснить свою точку зрения, Ньютон в последующих работах, и прежде всего в «Математических началах натуральной философии», строит своеобразную теорию пределов, о которой речь пойдет ниже.

Вершиной научного творчества Ньютона являются «Математические начала натуральной философии» (кратко «Математические начала») – грандиозный труд, опубликованный Ньютоном в 1687 году, через 20 лет после открытия им закона всемирного тяготения. В «Математических началах» Ньютон обобщил результаты, полученные его предшественниками (Галилей, Кеплер, Декарт, Гюйгенс, Гук, Галлей и др.), и свои собственные исследования и впервые создал единую систему земной и небесной механики, которая легла в основу всей классической физики.

По своей структуре «Математические начала» синтезировали новые экспериментальные методы и аксиоматический метод древнегреческих математиков. Первые примеры употребления аксиоматики вне геометрии дал еще Архимед в своей «статике». Ньютон впервые аксиоматически построил обширную систему механики. Начинает Ньютон с восьми определений, после чего формулирует три аксиомы, выражающие основные законы движения. Первая аксиома выражает закон инерции. Вторая гласит: «Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует». Третья выражает закон равенства действия и противодействия. На этой основе последовательно развивается длинная цепь многочисленных предложений общей и небесной механики. В частности, из закона всемирного тяготения Ньютон строго математически вывел законы движения планет, эмпирически установленные Кеплером, и дал динамическое объяснение многих явлений при движении небесных тел и приливов. Он решил задачу двух тел для сфер и заложил основы теории движения Луны.

Будучи в первую очередь трудом по механике, «Математические начала» богаты и собственно математическим содержанием. Помимо чисто геометрических и алгебраических доказательств, в книге широко используются инфинитезимальные приемы. Стремясь придать им большую убедительность, Ньютон уже в первой книге «Начал» намечает программу построения метода флюксий на основе учения о пределе в форме «последних отношений исчезающих величин» или «первых отношений зарождающихся величин». При этом под «последним отношением исчезающих величин» он понимает «предел, к которому всё время приближаются отношения беспредельно убывающих величин». Уточняя характер приближения, Ньютон пишет, что к пределу эти отношения могут подойти ближе, чем на любую данную разность, но не могут ни превзойти его, ни достигнуть его ранее, чем величины уменьшатся бесконечно.

Вводя термин «предел» (limes), Ньютон не дает ему определения и не описывает его основные свойства, в частности, не приводит теорем о единственности предела и его арифметических свойствах. Не устанавливает он и

важной связи между понятием предела и переменной бесконечно малой, хотя представление о ней и не было ему чуждым. Всё это, несомненно, ослабляет значение доказательств теорем о предельных переходах. Но последующие разъяснения и примеры раскрывают содержание этого понятия, которое Ньютон считал интуитивно ясным и выражающим свойства реальных величин и процессов.

Метод пределов в «Математических началах» изложен в двенадцати леммах, из которых одиннадцать помещены в первом отделе первой книги, а одна – в первом отделе второй книги. В этих леммах Ньютон обосновывает в общем виде многие наиболее распространенные схемы решения задач на квадратуры и построение касательных. Так, например, в леммах второй и третьей он доказывает равенство единице последних отношений между площадями криволинейной фигуры и вписанной и описанной около нее фигур, составленных из прямоугольников с неравными основаниями, наибольшее из которых безгранично уменьшается.

В шестой лемме устанавливается, что угол между касательной и проходящей через точку касания исчезающей хордой напоследок исчезает, причем предполагается, что точка касания лежит в области непрерывности кривой. Аналогичный, прикладной характер имеют и все остальные леммы. По поводу их Ньютон пишет: «Предыдущие леммы я предпослал, чтобы избежать скучного изложения долгих доказательств, приведением к нелепости по образцу древнегреческих математиков».

Прилагая серьезные усилия к тому, чтобы, используя идею предела, придать анализу прочную логическую основу, Ньютон не смог преодолеть довлеющую над эпохой концепцию бесконечно малых и тем более отказаться от употребления последних на практике. Хотя он и имел достаточно ясное представление о бесконечно малых как о переменных величинах, пределом которых служит нуль, но он не всегда придерживался этого взгляда и не замечал, что его теорию пределов можно хорошо согласовать с этими исчезающими бесконечно малыми.

Большую путаницу в восприятии его идей английскими математиками внесло также и то, что после публикации «Математических начал», в которых изложена идея предела, уже в начале XVIII века были изданы его более ранние математические работы, в которых исчисление флюксий строилось на основе бесконечно малых. Но об этом и о последних годах жизни Ньютона речь пойдёт в следующей лекции, посвящённой математике XVIII века.

2. Дифференциальное и интегральное исчисление Лейбница. Готфрид Вильгельм Лейбниц родился в Лейпциге в 1646 году и был, следовательно, всего на 4 года младше Ньютона. Он происходил из состоятельной семьи, три поколения которой служили саксонскому правительству. С ранних лет Лейбниц дышал атмосферой науки и политики. В шестилетнем воз-

расте Готфрид потерял отца, но до этого успел перенять от него любовь к истории. Хотя Лейбниц посещал школу, он в значительной степени был самоучкой благодаря непрестанному чтению книг из библиотеки отца. К двенадцати годам он освоил латынь настолько, что мог сочинять вполне приличные латинские стихи. От латыни он перешел к греческому, который выучил в основном самостоятельно.

Однако вскоре изучение классических языков перестало интересовать его, и он обратился к логике. Ему не было и 15 лет, когда он предпринял попытку реформировать логику, именно логику древнегреческих математиков, логику схоластов и отцов церкви. Из этой попытки впоследствии родилась и окрепла мысль о «всеобщей науке», которую он называл также «всеобщей характеристикой».

В возрасте 15 лет Лейбниц поступил в Лейпцигский университет на юридический факультет. Первых два года учебы он увлекся чтением философских книг и вскоре открыл для себя новый мир, созданный Кеплером, Галилеем и Декартом. Увидев, что постигнуть этот мир может лишь тот, кто знает математику, Лейбниц приступил к её изучению.

В 1666 году, когда Ньютон разрабатывал свою теорию всемирного тяготения и исчисление флюксий, двадцатилетний Лейбниц получил степень доктора права. От предложения стать профессором университета он отказался, устроившись юрисконсультом и дипломатом к одному из наиболее влиятельных немецких князей, поручившему ему пересмотреть свод законов в его княжестве.

Свою основную работу Лейбниц сочетал с колоссальной и разносторонней научной деятельностью в самых различных областях знаний. Математика была только одной из многих областей, в которых Лейбниц проявил свой яркий талант. Он внес значительный вклад также в юриспруденцию, государственное управление, историю, литературу, логику, вероучение, метафизику и философию.

Счастливый для Ньютона 1666 год был знаменательным также и для Лейбница. В сочинении «Рассуждение о комбинаторном искусстве» двадцатилетний юноша, развивая свои идеи о всеобщей характеристике как всеобщем методе познания, поставил своей целью создать «общий метод, с помощью которого все истины могут быть сведены к некоторому виду вычислений». Уточняя вид этих вычислений, Лейбниц пишет: «В то же время это должен быть род универсального языка или записей, однако коренным образом отличный от всех предложенных до сих пор; в нем символы и даже слова будут направлять мысль, и ошибки, исключая ошибки в данных, могут быть только ошибками вычислений. Очень трудно будет составить или изобрести

этот язык или характеристику, но его будет очень легко понимать без всяких словарей».

В соответствии с этой теорией все понятия надлежало свести к немногим простым понятиям, образующим как бы алфавит мышления, а каждому простому понятию поставить во взаимно-однозначное соответствие его знак, «характер», означающий форму и существо вещи, её признак.

Несмотря на невозможность реализовать эту идею в целом, в рассматриваемой работе предвосхищены некоторые моменты современной математической логики. В частности, в ней Лейбниц выдвинул идею применения в логике математической символики и построения логических исчислений, поставил задачу логического обоснования математики.

С этой идеей, в частности, было связано огромное значение символики, которая, по мнению Лейбница, должна быть положена в основание каждого оперативного исчисления. «Следует заботиться, – писал в 1678 г. Лейбниц, – о том, чтобы знаки были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления». Самым важным из созданных самим Лейбницем оперативных исчислений было дифференциальное и интегральное исчисление.

Вплоть до 1672 г. Лейбниц мало что знал о современной ему математике. Его математические интересы группировались вокруг комбинаторных задач, в которых он видел математическую основу логики. Ему было 26 лет, когда началось его настоящее математическое образование под руководством Гюйгенса, с которым он встречался в Париже в промежутках между дипломатическими делами. Гюйгенс ввел его в курс инфинитезимальных проблем математики. Он же поставил перед Лейбницем ряд задач, связывающих эти проблемы с комбинаторикой. Решив одну из задач Гюйгенса о нахождении сумм чисел вида $\frac{1}{k(k+1)}$, Лейбниц нашел также суммы некоторых других рядов, в том числе рядов с чередующимися знаками. Рассмотрение таких рядов привело Лейбница к общему вопросу об их сходимости. Ему мы обязаны предложением, что бесконечный знакопеременный ряд имеет конечную сумму, если абсолютная величина членов убывает и стремится к нулю.

В этот период Лейбницем были основательно проштудированы сочинения Декарта, Кавальери, Валлиса, Паскаля, Гюйгенса и др. Вскоре он настолько усвоил рассуждения своих учителей, что смог применять их самостоятельно. Доказал он это новым инфинитезимальным преобразованием, из которого получалось большинство известных до этого квадратур.

Чтобы показать уровень, на котором Лейбниц владел инфинитезимальными методами, рассмотрим это преобразование подробнее. Если касатель-

ная EC к кривой MN (рис. 15) отсекает на оси ординат отрезок AE и этот отрезок берется за ординату BF точки F, имеющей ту же абсциссу, что и C, то площадь, ограниченная геометрическим местом этой точки (кривой PQ), осью абсцисс и двумя ординатами, будет вдвое больше площади сектора, ограниченного дугой MN и радиус-векторами, проведенными из точки A в её концы.

Для доказательства этого утверждения Лейбниц, разбив дугу MN на бесконечное число бесконечно малых дуг-отрезков, выделяет один из них, CD, и на его основе строит фигуру, изображенную на рис.16. Используя подобие треугольников AHE и CGD, он составляет пропорцию $AE:AH=CD:CG$ или, учитывая, что $AE=BF$; $CG=FL$, пропорцию $BF:AH=CD:FL$, откуда $BF\cdot FL=AH\cdot CD$. Это равенство и доказывает, что площадь прямоугольника $BFLK$ равна удвоенной площади сектора ACD.

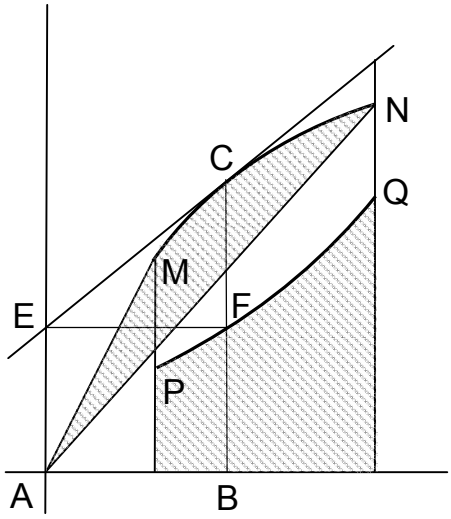


Рис. 15

Просуммировав полученное равенство по всем частичным дугам, он получает требуемое соотношение.

Определяя по методу Ферма касательные к параболам и гиперболам разных порядков, Лейбниц нашел, что соответствующая им вспомогательная кривая есть, в свою очередь, парабола или гипербола того же порядка, но с новым параметром. Его предложение вело, таким образом, к уравнению, из которого можно найти площадь сектора под кривой.

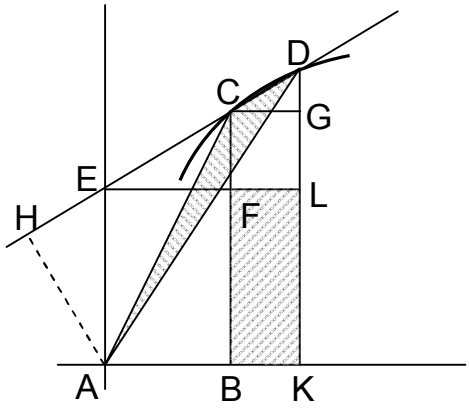


Рис. 16

К некоторым из основных мыслей, значительно ранее положенных Ньютоном в основу его трактовки инфинитезимальной математики, Лейбниц пришел независимо от применения рядов. Мысли эти мы встречаем в его бумагах, относящихся к 1673 году. Здесь он, прежде всего, находит касательную к произвольной кривой при помощи «характеристического треугольника», образованного разностями между абсциссами и между ординатами двух бесконечно близких точек и лежащей между этими точками дугой. Эти величины он позже обозначит символами dx, dy, ds. Легко видеть, что этот треугольник подобен треугольнику, образуемому

подкасательной, ординатой и касательной, или треугольнику, образуемому ординатой, поднормалью и нормалью. При вычислении отношений этих величин Лейбниц берет только члены первой степени относительно бесконечно малых величин, отбрасывая члены высшей степени, предупреждая, однако, о необходимости соблюдать осторожность, когда члены первой степени взаимно уничтожаются.

С таким использованием бесконечно малых и подобных им конечных треугольников были, впрочем, знакомы все те, кто занимался тогда инфинитезимальными исследованиями, и полученное таким образом Лейбницем более широкое применение метода Ферма не отличалось по существу от того, которое мы находим у Барроу и Грегори. Однако, устанавливая свой метод и сопоставляя его с исследованиями Паскаля, применявшего ту же фигуру в задаче квадрирования, Лейбниц сделал и иные наблюдения, ускользнувшие от внимания упомянутых исследователей. В частности, Лейбниц показал взаимно-обратную связь между операциями, которые он впоследствии назвал дифференцированием и интегрированием, в другом виде, чем Барроу и Грегори. При этом он, подобно Барроу, имел в виду, прежде всего, применение квадратуры к решению обратной задачи на касательную. С другой стороны, он уже здесь понял, что путь, которым можно решать эти задачи, лежит в составлении сводок результатов определения касательных (дифференцирования), на что уже раньше указывал Декарт и чем уже тогда много раз пользовался Ньютон в своих не предназначавшихся к опубликованию работах.

Для того чтобы мысли, зародившиеся у него в 1673 г., достигли полной ясности, Лейбницу пришлось проделать большую работу. Она осложнялась тем, что, в отличие от Барроу и Ферма, которые все величины, выражаемые теперь интегралом $\int ydx$, всегда изображали площадью криволинейной трапеции, Лейбниц придерживался данного Кавальери и уточненного Паскалем представления $\int ydx$ как суммы «всех» y. Его определение, в отличие от определения Барроу, предполагало, что промежутки между ординатами y равны. При таком положении вещей то обстоятельство, что $\int xdx$ равен $\frac{1}{2}x^2$ (при нижнем пределе равном нулю), не позволяло еще заключить, что и $\int ydy$ также равен $\frac{1}{2}y^2$, так как независимая переменная есть x, и, следовательно, величины dy не равны между собой. Лейбниц должен был доказывать это особо. Это усложняло ему работу, но в то же время именно это обстоятельство послужило одним из факторов, приведших Лейбница к разработанной им и дошедшей до наших дней форме изложения.

В процессе работы, связанной с этими исследованиями, Лейбниц развил постепенно свою инфинитезимальную символику и алгоритм составляющих

основу разработанного им исчисления. Получение все дальше идущих результатов часто затруднялось для Лейбница тем, что параллельно он занимался выработкой и совершенствованием этого исчисления. С другой стороны, благодаря этому он получал многочисленные случаи испробовать свой аппарат на весьма разнообразных задачах, как новых, так и таких, результаты которых он нашел у более ранних исследователей. Вследствие этого, когда его символика стала, наконец, достоянием гласности, уже можно было ручаться не только за её применимость, но и за её надежность.

Введение новой символики и первых общих правил началось с анализа задач на вычисление квадратур. Вначале Лейбниц, следуя сложившейся традиции, совокупность ординат l обозначал $omn \cdot l$, что означало «все l». Затем он стал использовать запись $\int l$, в которой знак $\int$ означал стилизованную форму первой буквы слова «сумма».

Вначале это был только более удобный для обозначения способ записи; но как раз это обстоятельство позволяет связать с ним определенные правила для простейших операций этого рода, из которых составляются остальные. В частности, Лейбниц сейчас же после введения символа интеграла устанавливает известные правила: $\int x = \frac{x^2}{2}$, $\int x^2 = \frac{x^3}{3}$, $\int \frac{a}{b} x = \frac{a}{b} \int x$ – и тут же применяет преобразование, которое можно записать в виде $\int (u+v) = \int u + \int v$. С помощью таких правил ему действительно удаётся, как он сам подчеркивает, создать для своих операций особого рода новое исчисление.

Из правил этого исчисления Лейбниц выводит правило обратной операции, позволяющей по заданному результату интегрирования (первообразной) находить интегрируемую функцию. Первая запись, касающаяся этого правила, выглядела у Лейбница следующим образом: обозначив $\int l = ya$ и введя символ дифференциала d как разности между двумя ближайшими значениями переменной, он записывает $l = \frac{ya}{d}$. Обозначения $\frac{ya}{d}$ и ему подобные были вскоре заменены Лейбницем на $d(ya)$. По поводу такой замены Лейбниц писал «dx – это то же, что $\frac{x}{d}$, т.е. разность между двумя ближайшими x».

Пользуясь обозначением дифференциала, Лейбниц в своей записи интеграла вводит множитель dx, присутствие которого соответствует тому, что Лейбниц, следуя Паскалю, при вычислении площади каждое значение ординаты умножал на некоторое постоянное расстояние между ними. В результате такого преобразования и образовалась дошедшая до нашего времени фор-

ма $\int ydx$. В этой новой записи правило перехода к обратной операции выглядит следующим образом: если $\int ldx = ya$, то $l = d(ya)$.

Вскоре после введения дифференциала независимой переменной под знак интеграла Лейбницу, должно было, стать ясно, что легче всего установить правила новых исчислений в первую очередь для дифференцирования и уже потом из них вывести правила интегрирования. Пользуясь теоремой о моментах, Лейбниц доказывает, что $\int ydy = \frac{1}{2}y^2$ и в том случае, когда dy является зависимой величиной. Пользуясь тем же методом, он выводит правило интегрирования по частям.

Первое письменное сообщение о дифференциалах и правилах действия с ними мы находим во втором письме Лейбница к Ньютону (1677 г.). В нём Лейбниц определяет дифференциалы dx и dy как бесконечно малые разности между следующими друг за другом значениями x и y, не давая более точного пояснения этого понятия. Он дает правило образования дифференциала степени и произведения и, в связи с ним, – правило дифференцирования целой рациональной функции x и y или уравнения, получаемого приравниванием такой функции нулю. Он показывает, что общепринятое в то время правило определения касательных вытекает отсюда как следствие, но вместе с тем замечает, что его собственный метод применим и при наличии более чем двух переменных, а также при наличии радикалов. Правило для дифференцирования корня содержится, таким образом, в формуле $dx^z = zx^{z-1}dx$.

Содержание письма показывает, что у Лейбница к тому времени основы его дифференциального исчисления были совсем готовы. Однако их публикации мешала чрезмерная загруженность основной работой в качестве герцогского историографа и тайного советника юстиции. Сообщил он о них только в 1684 году в шестистраничной статье «Новый метод для максимумов и минимумов, а также для касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества и особый вид исчисления для этого». Несмотря на малые размеры статьи, она приобрела фундаментальное значение в процессе создания нового исчисления, дошедшего до наших дней.

Изложение было трудным и неясным, но статья содержала наши символы dx, dy и правила дифференцирования, включая $d(uv) = u\,dv + v\,du$ и дифференцирование дроби, а также условие $dy = 0$ для экстремальных значений и $d^2y = 0$ для точек перегиба. Для того чтобы правила можно было применять по возможности более непосредственно, Лейбниц избегает употребления дробных и отрицательных показателей. Особую важность представляет для него то обстоятельство, что его правила можно применять и не освобож-

дая предварительно уравнение, определяющее зависимость y от x, от иррациональностей.

В этой статье Лейбниц за дифференциал dx независимой переменной x принимает совершенно произвольную величину. Дифференциал же dy величины y, зависящей от x, Лейбниц определяет как $\frac{y\,dx}{S_t}$, где S_t – подкасательная к кривой в точке, абсцисса которой есть x, а ордината – y. На рисунке 17, который существенно упрощен по сравнению с чертежом, приведенным в рассматриваемой статье Лейбница, дана геометрическая интерпретация всем этим величинам. В частности, независимой переменной x соответствует отрезок OR, зависимой переменной y – отрезок MR, дифференциалу dx – отрезок RS, дифференциалу dy – отрезок NP, подкасательной S_t – отрезок TR. Из подобия треугольников MPN и TRM следует пропорция $TR : MR = MP : NP$ или, переходя к длинам, $S_t : y = dx : dy$, откуда $dy = \frac{y\,dx}{S_t}$, чем и объясняется принятое Лейбницем «формальное» определение дифференциала зависимой переменной. Применение дифференциалов в предложенном исчислении непосредственно следует из этих определений. Для доказательства же самих правил Лейбниц апеллирует к тому обстоятельству, что дифференциалы dy, dz, … можно считать пропорциональными мгновенным приращениям величин y, z, …. Указанный прием вполне соответствует ньютонову исчислению флюксии, в котором время представляет собою вспомогательную величину, которую можно изменять произвольно.

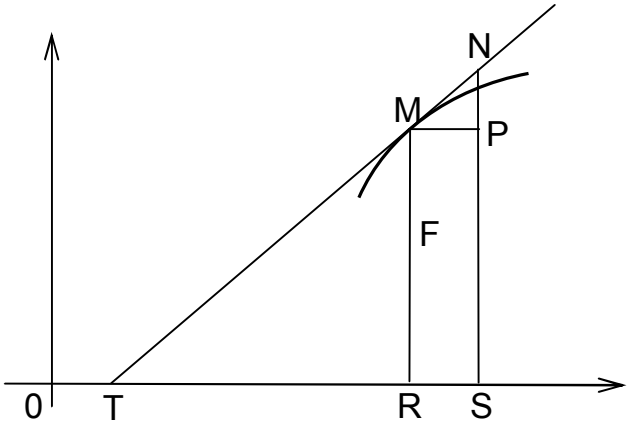


Рис. 17

Большое значение этого сочинения определяется, прежде всего, тем, что сформулированные в нём формулы дифференцирования ясно высказаны и выставлены Лейбницем в качестве общего исходного пункта для всех инфинитезимальных исследований. Не менее важно и то, что связь с символикой делает их основой исчисления, с помощью которых можно производить разнообразные инфинитезимальные исследования таким же образом, как исследования анализа конечной величины с помощью буквенного исчисления.

В рассматриваемой работе Лейбниц не применяет своё исчисление к квадратуре и поэтому не приводит свой знак интеграла и не рассматривает

связанные с ним правила, вытекающие из его правил дифференцирования. Сам он, как мы знаем, частично нашел первые из них раньше, чем последние. Набросок сочинения, содержащего начальные основы интегрального исчисления, основанного на правилах дифференцирования, найден среди относящихся к этому времени рукописей Лейбница. Впервые знак интеграла был опубликован в статье Лейбница (1686); сам же термин «интеграл» впервые в печати употребил Я. Бернулли в 1690 г., после чего вошло в обиход и выражение «интегральное исчисление» (Лейбниц сначала говорил о «суммирующем исчислении»). Хотя Лейбниц в отличие от Ньютона вводил интеграл (у Ньютона это флюента) не как результат обращения операции дифференцирования, а как сумму бесконечного числа бесконечно малых дифференциалов, вычислял он его, как и Ньютон, с помощью отыскивая первообразных (термин Лагранжа). Постоянная интегрирования в печати появилась в статье Лейбница в 1694 году. При вычислении интегралов с определенными пределами с помощью неопределенных интегралов как Ньютон, так и Лейбниц пользовались носящей их имя формулой; однако современная терминология была создана только в конце 18 века. Среди употреблявшихся Лейбницем специальных способов интегрирования были: замена переменной; интегрирование по частям, а также т. н. дифференцирование по параметру под знаком интеграла (1697). Лейбницу же принадлежит идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения на простейшие дроби (1702-1703), впоследствии усовершенствованная другими математиками.

Во всей этой деятельности по созданию дифференциального и интегрального исчисления отчётливо проявляется присущая Лейбницу склонность к введению новой символики и терминологии, наиболее проявившаяся при создании дифференциального и интегрального исчисления, так же, как и в других областях математики. В частности, благодаря влиянию Лейбница стали пользоваться принятым у нас теперь знаком равенства и точкой как символом, означающим умножение. Лейбницу принадлежат и термины «координаты» и «функция». Последний термин использовался им первоначально для обозначения отрезков, связанных с точкой на кривой, например, ординаты, подкасательной, поднормали, отрезками касательной и нормали, радиусом кривизны. Впоследствии, уже в XVIII веке, смысл этого термина подвергался существенным изменениям.

Разъяснения Лейбница относительно оснований анализа страдали ещё большей неопределенностью, чем разъяснения Ньютона. Иногда его dx, dy были конечными величинами, иногда же величинами, меньшими любого определенного количества, и все-таки не равными нулю. Не имея строгих определений, он прибегал к аналогиям, скажем, с соотношением между радиусом Земли и расстоянием до неподвижных звезд. Очень часто, особенно в более поздние годы жизни, Лейбниц отзывался о бесконечно малых как об идеаль-

ных вещах и понятиях, как об удобных в эвристическом отношении функциях, результаты применения которых можно, если угодно, получить с помощью строгого доказательства методом исчерпывания.

Сопоставляя деятельность Ньютона и Лейбница по созданию математического анализа, следует признать, что первые результаты в этой области, безусловно, принадлежат Ньютону. Вместе с тем бесспорно, что Лейбниц пришёл к аналогичным результатам, правда в другой форме, самостоятельно, и опубликовал их значительно раньше Ньютона. Как показало дальнейшее развитие анализа, алгоритм и символика Лейбница, которой он придавал особое значение, имели преимущество перед теми, которые применял Ньютон. Несмотря на эти очевидные теперь факты, в самом конце XVII века между Ньютоном и Лейбницем возник спор о приоритете, раздуваемый их приверженцами, часто не понимающими сути вопроса.

3. Первые ученики и последователи Лейбница. Ближайшие годы после выхода в свет «Нового метода» дали Лейбницу двух талантливейших сотрудников в лице братьев Якоба (1654–1705) и Иоганна (1667–1748) Бернулли. Выходцы из купеческой семьи, которая в XVI веке переехала из Англии сначала в Антверпен, а после захвата последнего испанцами – в швейцарский город Базель, они с молодых лет увлекались математикой, и, хотя родители готовили старшего к пасторской службе, а младшего к медицинской, оба они стали выдающимися математиками; Якоб в 1687 г. занял кафедру математики в Базельском университете, где преподавал до своей смерти. Иоганн в 1697 г. стал профессором в Гронингеме (Голландия), а после смерти брата перешёл на его кафедру, где преподавал сорок три года.

Познакомившись в 1687 г. со знаменитой статьёй Лейбница и оценив её по достоинству, оба брата стали убеждёнными сторонниками дифференциального исчисления. С 1690 г. они начали публиковать свои работы в этой области.

Образовавшийся триумвират в течение десятилетия значительно углубил применение дифференциального исчисления к различным задачам математики и механики. Ещё до 1700 г. они втроём открыли значительную часть современного курса анализа и несколько важных разделов в более сложных областях, включая решение некоторых задач вариационного исчисления. В частности, в 1690 г. Якоб Бернулли решил задачу об изохроне, т.е. линии, по которой тяжёлая точка в равные промежутки времени спускается по вертикали на равные отрезки, поставленную и решённую Лейбницем в 1688 году. Выведя и проинтегрировав соответствующее дифференциальное уравнение, Якоб Бернулли поставил задачу определения линии, образуемой подвешенным за два конца гибким канатом. Эту задачу вскоре же решил Гюйгенс, Лейбниц и младший из братьев Бернулли. В 1691–1692 гг. Я. Бернулли де-

тально изучил свойства параболической и логарифмической спирали и ввёл полярные координаты. В этот же период оба брата и Лейбниц проинтегрировали ряд дифференциальных уравнений. В свою очередь Иоганна Бернулли часто рассматривают как изобретателя вариационного исчисления вследствие его вклада в задачу о брахистохроне – кривой быстрейшего спуска для материальной точки, которая движется в поле тяготения от заданной начальной до заданной конечной точки. Решением задачи о брахистохроне оказалась циклоида – кривая, которая решала также задачу о таутохроне – кривой, вдоль которой материальная точка в гравитационном поле достигает самой низкой точки движения за время, не зависящее от исходной точки движения. Гюйгенс открыл это свойство циклоиды ещё в 1765 г. и использовал его для построения таутохронных часов с маятником, период колебания которого не зависит от его амплитуды.

В 90-х годах к братьям Бернулли, а также, естественно, и Лейбницу сначала в качестве ученика, а потом и самостоятельного исследователя присоединился маркиз Гальом Франсуа Лопиталь (1661–1704). В молодости, как и многие другие дворяне, военный, он рано оставил службу по слабости зрения и всецело отдался занятиям математикой. Член Парижской академии наук, человек, близко стоявший к редакции одного из редких тогда научных журналов, Лопиталь ко времени знакомства с работами Лейбница и братьев Бернулли пользовался в научных кругах Франции большим весом и влиянием. Уже в сентябре 1692 г. в упомянутом выше журнале появилась его совместная с Иоганном Бернулли статья о «решении одной задачи, предложенной некогда де-Боном господину Декарту», в которой требовалось определить кривую, отношение ординаты которой к подкасательной равно отношению данного отрезка к отрезку ординаты, заключённому между кривой и биссектрисой первого координатного угла. Высокий уровень владения новым анализом Лопиталь продемонстрировал, решив почти одновременно с Ньютоном, Лейбницем и Якобом Бернулли упомянутую выше задачу о брахистохроне. В 1693 г., во время посещения Иоганном Бернулли Парижа, Лопиталь пригласил молодого швейцарца в своё поместье в Турене, где они провели в совместных занятиях четыре месяца и где Иоганн познакомил Лопиталя с содержанием написанных им в 1692 году лекций. Через два года Лопиталь предложил так называемую задачу о висячих мостах и решил её. О большом практическом значении этой задачи в том же номере журнала с похвалой отозвался Иоганн Бернулли.

Особую известность Лопиталь получил благодаря выпущенному им анонимно в 1696 г. учебнику «Анализ бесконечно малых». По его мнению, это произведение должно было служить как бы введением к предполагаемой книге Лейбница по интегральному исчислению, облегчающим последнему работу. Лейбниц, к которому Лопиталь обратился за советом, горячо под-

держал это, указав, что издание такого пособия тем более важно, что автором явится человек, свидетельство которого может придать излагаемому предмету бóльший вес. «Анализ бесконечно малых» оказался, таким образом, первым печатным курсом дифференциального исчисления, причём именно исчисления дифференциалов; столь привычного для нас понятия производной в этом типичном сочинении лейбницевой школы, разумеется, нет. Одним из главных достоинств этого произведения является последовательность изложения. Первая глава курса начинается с определения постоянных и переменных величин, объяснения употребляющихся обозначений и установления исходных требований (постулатов), на которых основываются все дальнейшие действия с бесконечно малыми величинами. В качестве одного из двух таких требований Лопиталь выставляет следующее: «Требуется, чтобы кривую линию можно было рассматривать как совокупность бесконечного числа бесконечно малых прямых или (что то же самое) как многоугольник с бесконечным числом бесконечно малых сторон, определяющих образуемыми ими углами кривизну линии». При этом допущении бесконечно малые криволинейные треугольники в дальнейшем принимаются за прямолинейные, касательные становятся продолжением сторон многоугольника, составляющего кривую, т.е. секущими, и т.д. Постулат замены отрезка кривой прямолинейным отрезком тесно связан с другим общим принципом анализа бесконечно малых, согласно которому любая величина a не меняется, если к ней прибавить величину, бесконечно малую по сравнению с a. Привёденный кардинальный постулат, позволяющий отбрасывать бесконечно малые, является фундаментом математики бесконечного школы Лейбница. Пользоваться им очень просто, и он сразу даёт множество теорем. Вот как, например, выводится дифференциал, т.е. разность, в смысле Лопиталя, произведения двух величин x и y:

Когда x становится $x+dx$, а y переходит в $y+dy$, то произведение $(x+dx)(y+dy)$ становится равным $xy+xdy+ydx+dxdy$, а изменение произведения будет $xdy+ydx+dxdy$. И так как последний член суммы бесконечно мал сравнительно с двумя первыми, то $xdy+ydx+dxdy$ будет то же, что и $xdy+ydx$, т.е. $d(xy)=xdy+ydx$.

Это, как мы знаем, вполне справедливо, хотя начала, на которых основывается доказательство Лопиталя, на современный взгляд, ложны. По тому же принципу выводятся правила дифференцирования алгебраических выражений. Тем самым оказывается заложенным фундамент, на котором базируются две следующие главы, посвящённые проведению касательных и отысканию наибольших и наименьших значений. При этом интересно, что, зная дифференциалы только алгебраических выражений, Лопиталь ухитрялся ис-

следовать трансцендентные кривые. С этой целью он то использовал некоторое подобие полярных координат, то устанавливал зависимость между прямолинейными и криволинейными отрезками изучаемых и вспомогательных линий. Лопиталь проделывает это с большим искусством, для нас, впрочем, теперь излишним и затрудняющим чтение, ибо нам проще продифференцировать ту или иную трансцендентную функцию, чем всякий раз, пользуясь какими-либо свойствами кривой, составлять подходящее алгебраическое уравнение. При изложении теории максимумов и минимумов Лопиталь обращает внимание на перемену знака дифференциала ординаты вблизи соответствующих точек – хотя решения задач не содержат специального исследования вида экстремума, – разбирает случай обращения дифференциала не в нуль, а в бесконечность. Здесь же даётся приём определения асимптот к кривой. Четвёртая глава начинается снова с определений на этот раз дифференциалов высших порядков и относящихся к ним действий, необходимых при исследовании точек перегиба и возврата первого рода. В пятой главе изучаются развёртки и развёртывающие, устанавливаются известные свойства их нормалей и касательных и даются формулы радиуса кривизны развёртывающейся в прямоугольных и полярных координатах. Шестая, седьмая и восьмая главы посвящены изучению огибающих. В девятой главе приводится знаменитое правило раскрытия неопределённости и снова содержатся некоторые квадратуры.

Книга Лопиталя произвела на современников сильное впечатление. До этого все сведения о новом исчислении интересующиеся могли черпать из шестистраничной статьи Лейбница и разрозненных журнальных публикаций, в которых приводились, часто без доказательства, решения сложных задач, пользуясь которыми трудно было составить сколь-нибудь отчётливое представление о сути дифференциального исчисления. «Анализ бесконечно малых» Лопиталя подкупал стройностью её архитектуры, относительной простотой и необыкновенным обилием примеров различной степени трудности, разбор которых позволял и набить руку, и глубже понять общие рассуждения и приёмы. Написанный Лопиталем учебник выдержал ряд изданий: 1696, 1715, 1720, 1768 гг. – и был переведён в 1730 г. на английский язык. И ещё сто лет спустя о нём писали как о хорошей и удачно составленной книге, что было качеством довольно редким в математических сочинениях, в которых отсутствие системы и метода часто вредило их подлинному достоинству.

Разумеется, учебник Лопиталя не был свободен и от недостатков. В первую очередь это относится к изложению его методологической базы, разъяснению природы его первичных понятий и, прежде всего, понятий дифференциала, кривой линии и касательной. Вместо этого, как мы видели, Лопиталь выдвигает два приведённых выше постулата. Допущение этих двух, типичных для лейбницева анализа требований, само по себе нельзя ставить в вину

Лопиталю. Но его критики считали, что он всё же должен был уделить больше внимания в своём курсе, претендовавшем на роль общедоступного введения в новую науку, выяснению природы её понятий и правомерности её постулатов, которые вовсе не представлялись очевидными всем. В связи с этим следует заметить, что незадолго до выхода в свет «Анализа бесконечно малых» стали известными критика лейбницевского анализа голландского математика Ньювентиита и ответ на неё Лейбница. Высказанные Лейбницем в этом возражении мысли по поводу использования «несравнимо малых» величин и допущения бесконечного малых высших порядков, против которых особенно протестовал Ньювентиит, Лопиталь не включил даже в предисловие своей книги, ограничившись замечанием о существовании такого возражения. Возможно, объяснения Лейбница не показались Лопиталю достаточно убедительными, чтобы включать их в свою книгу. Встречаются в книге Лопиталя иногда и просто ошибочные рассуждения и выкладки, хотя и в очень небольшом числе. Наконец в курсе естественно отсутствует ряд разделов, ещё только формирующихся. В частности, у него ещё нет дифференциалов трансцендентных функций, нет исследования экстремумов с помощью высших производных; совершенно отсутствуют разложения в ряды, в его время осуществлявшиеся без применения дифференциального исчисления; исследование особых точек кривых находится в зародышевом состоянии и т.д. Это обстоятельство, в котором и в малой степени нельзя упрекнуть Лопиталя, послужило естественной причиной быстрого морального старения его книги. Можно скорее удивляться тому, что, несмотря на эти пропуски, она, благодаря достоинствам изложения и, отчасти, малой конкуренции, выдержала четыре столь удалённых друг от друга издания. Лопиталь является также автором курса аналитической теории конических сечений, основанного на декартовом методе и отличающегося простотой изложения и обилием примеров.

4. Другие разделы математики, разрабатывавшиеся в XVII веке. В лекциях, посвященных математике XVII века, основное внимание уделено вопросам инфинитезимальной математики и формированию дифференциального и интегрального исчислений. Разумеется, история математики этого замечательного столетия не исчерпывается только этими вопросами, хотя они и определяют главное направление её развития. В нём было ещё много сторон, линий развития, не являвшихся в то время главными, но впоследствии оказавшихся весьма важными. Остановимся хотя бы кратко на некоторых из них.

Алгебра в этом веке прошла большой и сложный путь, шаг за шагом освобождаясь от геометрической формы, приданной ей еще в древней Греции. Совершенствовалась символика, принявшая к концу столетия близкую нам форму. Наряду с разработкой и совершенствованием геометрических мето-

дов решения уравнений не прекращались попытки найти решение в радикалах уравнений степени выше четвертой, а также доказать основную теорему алгебры о числе корней алгебраического уравнения. Рассматривалась проблема приводимости алгебраических уравнений. В 1693 г. Лейбниц ввел начала теории определителей и правило, известное под именем Крамера.

Существенно расширился предмет и методы геометрии. Усилиями Декарта и Ферма в нее вошла, как было показано выше, аналитическая геометрия, связавшая геометрию с алгеброй. Существенный импульс в развитие аналитической геометрии внёс на рубеже XVII и XVIII веков И. Ньютон. Отказавшись от принятой Декартом классификации кривых по родам и заменив её классификацией по степеням соответствующих уравнений, он исследовал алгебраическими методами плоские кривые третьего порядка. Результаты были опубликованы в 1704 году в произведении «Перечисление линий плоских кривых третьего порядка». Геометрические приложения анализа постепенно сформировались в будущую самостоятельную математическую дисциплину – дифференциальную геометрию. В первой половине XVII в. были заложены основы проективной геометрии. В 1636 г. Ж. Дезарг (1593–1662), французский инженер и архитектор, разработал теорию перспективы, развив целую систему проективно-геометрических представлений: бесконечно удаленных элементов, инволюции и т. д. Проективные представления внесли в теорию конических сечений, кроме Дезарга, также Б. Паскаль (1640), Ф. Лагир (1685).

Теория чисел обогатилась замечательными исследованиями Ферма, определившими дальнейшее её развитие. В частности, ему принадлежат сформулированные им без доказательства две теоремы:

а) великая теорема Ферма: Диофантово уравнение $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$ и целое не имеет решений в натуральных числах. До сих пор она доказана только для $n \le 2521$; общего доказательства еще нет;

б) малая теорема Ферма: если p – простое, a – целое, не делящееся на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p. Первым доказательство этой теоремы, лежащей в основе теории сравнений, дал Л.Эйлер.

В связи с вычислением сумм одинаковых степеней натуральных чисел Якоб Бернулли открыл числа, называемые теперь числами Бернулли. В XVII веке Б. Паскаль, П. Ферма и Г. Лейбниц в ряде статей разработали основные понятия комбинаторики. Тогда же Б. Паскаль впервые сформулировал принцип математической индукции.

Теория вероятностей, элементы которой стали зарождаться еще в XVI веке, с середины XVII века, благодаря усилиям таких математиков, как Паскаль, Ферма и Гюйгенс, стала формироваться как самостоятельная математическая наука. Большой вклад в её развитие внес старший из братьев Бернул-

ли – Якоб Бернулли, который по этому предмету написал «Искусство предположения» – книгу, опубликованную посмертно в 1713 году. В её первой части перепечатан трактат Гюйгенса об азартных играх, в остальных частях рассматриваются перестановки и сочетания, а главным результатом является «Теорема Бернулли» – важный частный случай закона больших чисел.

Лекция 14. Математика первой половины XVIII века

План лекций:

1. Характеристика эпохи.
2. Английская и континентальная школы математического анализа. начала XVIII века.
3. Представители английской школы анализа первой половины. XVIII века (Тейлор, Маклорен, де-Муавр).
4. Представители континентальной школы анализа первой. половины XVIII века.
5. Леонард Эйлер и его математическое творчество.
6. Леонард Эйлер и обоснование анализа.

1. Характеристика эпохи. Восемнадцатый век в Европе был веком продолжающейся технической революции и перехода от мануфактурного производства к фабричному. В Англии, ведущей стране того времени, после буржуазной революции XVII века власть феодального дворянства была окончательно подорвана. В отличие от Англии, страны континентальной Европы представляли собой абсолютные дворянские монархии. Наиболее крупными из них была Франция, Австро-Венгрия, именовавшаяся в те годы «Священной римской империей германской нации», и Россия. Из этих стран сильнее всего буржуазия была во Франции, где назревала, а в 1789 году произошла Великая Французская революция. Идеологической подготовкой революции была деятельность французских просветителей (Вольтера, Руссо и др.), определившая одно из названий XVIII столетия, – «Век просвещения». Крупнейшим событием духовной жизни не только Франции, но и всей Европы явилось издание на протяжении 1751–1772 гг. под руководством философа Дидро двадцати восьми томной энциклопедии, проникнутой духом материализма и демократии. Влияние французских идеологов XVIII века в той или иной мере сказывалось во всех странах континента. Даже абсолютизм во многих государствах принимал форму «просвещенного абсолютизма», и такие монархи, как прусский король Фридрих II и русская императрица Екатерина II, оказывали, иногда вопреки своим личным желаниям, поддержку различным мероприятиям в области образования и науки. Германия и Италия в рассматриваемое время были раздроблены на большое количество соперничавших государств (герцогств), площадь некоторых из них не превышала нескольких квадратных километров. Крупнейшим из этих государств была Пруссия. В конце XVII и начале XVIII века реформы Петра I коренным образом преобразовали ранее отсталую Русь, которая вступила в число великих держав.

Основными центрами развития математики, как и всей науки XVIII века, оставались академии наук, при которых работали крупнейшие ученые. По большей части это были государственные учреждения, деятельность которых субсидировалась, контролировалась и в некоторой степени направлялась правительствами. Наиболее заметное исключение представляло Лондонское королевское общество. Значение университетов в научной деятельности было невелико, если не считать опять-таки Англию и те страны, в которых академий не имелось. Ведущими академиями в XVIII веке были: Парижская АН, Берлинская АН, особенно после её реорганизации в 1745 году, и Петербургская АН. По сравнению с XVII веком значительно увеличился выпуск периодической литературы. Здесь академиям принадлежало первое место. Первоначально содержание издаваемых ими журналов носило смешанный характер, так что статьи по математике печатались вместе со статьями, посвященными физиологии, филологии и другим научным проблемам. Специальные математические журналы начали появляться только в самом конце рассматриваемого столетия. Восемнадцатый век характеризуется значительным прогрессом математического образования. Хотя в университетах физико-математические факультеты ещё не были выведены из философских, но элементарно-математические курсы теперь в ряде случаев дополнялись начальными сведениями из аналитической геометрии и анализа; впрочем, слушателей таких курсов насчитывались единицы. Во Франции, да и в других странах, важную роль в подготовке учёных в XVIII веке играли военные, военно-инженерные, морские школы, математические программы которых нередко превосходили по содержанию и объёму университетские курсы. В XVIII веке происходит и реформа учебной литературы по математике. Если изложение в учебных руководствах прежних веков носило, как правило, догматический характер и ограничивалось рецептами и примерами построений и вычислений, то в первой половине XVIII века появляются учебники, отличительной чертой которых было желание пропитать обучение духом математического метода и поставить во главу всего обучения воспитание математического мышления. Однако это, по общей тенденции – прогрессивное направление педагогической мысли, страдало переоценкой формальной и на деле часто иллюзорной строгости в ущерб наглядности и понятности изложения. Начальные отделы учебников загромождались многочисленными аксиомами, постулатами и определениями, не получавшими затем применения; во многом оставляла желать лучшего структура курсов. Несколько позже в Германии стали появляться руководства, в большей мере удовлетворяющие всё возрастающие потребности соединить научность и доступность изложения и к тому же учитывающие новые достижения математики.

Сложившаяся в XVII веке механистическая концепция получила в XVIII веке дальнейшее развитие и распространение, что в свою очередь предопределило ведущую роль математического анализа и его приложений, прежде всего к механике. Возникший в самом конце XVII века спор между сторонниками Ньютона и Лейбница о приоритете создания математического анализа получил в начале XVIII века дальнейшее развитие и привёл, в конечном счете, к образованию двух противостоящих и территориально разобщенных математических школ. Одну из них, состоящую в основном из англоязычных математиков, пользующихся флюксионным исчислением Ньютона, будем называть английской, а другую, состоящую из математиков континентальной Европы, пользующихся анализом бесконечно малых, разработанную Лейбницем, – континентальной.

2. Английская и континентальная школы математического анализа начала XVIII века. Как отмечалось в предыдущей лекции, в основе математического анализа, сложившегося в школе Лейбница, лежало учение об актуально бесконечно малых величинах и представление о кривой как ломаной с бесконечным числом бесконечно малых звеньев. Естественно, что методы, основанные на таких понятиях и воззрениях, не могли быть ни строгими, ни четкими. Вместе с тем результаты, получаемые этими методами, неизменно выдерживали проверку на истинность, например, методом исчерпывания, и у математиков, пользующихся исчислением бесконечно малых, не возникало опасений, что этот метод может их подвести. Большим достоинством исчисления бесконечно малых, в глазах континентальных математиков, была сравнительная простота его применения. И они, пользуясь этим исчислением, получали все новые и новые, часто очень важные результаты.

В эти годы в Англии хотя и не сразу, но зато прочно и надолго обосновалась теория флюксий Ньютона. Как мы видели, главное её отличие от исчисления бесконечно малых Лейбница заключалось в предпринятых Ньютоном мерах по изгнанию из анализа идеи бесконечного при помощи метода первых и последних отношений, т.е. метода пределов. Однако наряду с такими мерами у него постоянно встречались высказывания инфинитезимального толка, а в самом изложении теории пределов – недоговоренности и логические неясности. Наконец, практическое использование бесконечно малых не сопровождалось у Ньютона подлинным углублением доказательств при помощи перехода к пределу. Ни сам Ньютон, ни его последователи не смогли преодолеть это смешение идей и понятий. Дополнительную путаницу создавало то, что труды Ньютона публиковались в порядке, обратном их написанию, а, следовательно, порядку эволюции идей самого Ньютона. Его непосредственные последователи не смогли установить ни эволюцию взглядов Ньютона, ни зависимость между теорией пределов и доказательствами с помощью бесконечно малых. Смешав то и другое, многие англоязычные уче-

ные внесли на некоторое время изрядную путаницу в философию математики. Об этом свидетельствуют многие книги, которые вышли в Англии между 1700–1730 гг. Их авторы, желая умалить роль Лейбница в создании анализа и доказать, что ничего нового, кроме новой терминологии, он не создал, отождествляли понятие флюксии с понятием бесконечно малой величины. В «Переписке», составленной из выступлений различных ученых и опубликованной в 1712 г. по постановлению Английского королевского общества в связи со спором Лейбница и Ньютона о первенстве в изобретении нового исчисления, утверждалось, что «метод дифференциалов тот же самый, что и метод флюксий, исключая названия и обозначения. Далее авторы «Переписки» утверждали совершенно неприемлемые вещи, например, что «Лейбниц называет разностями те величины, которые Ньютон называет моментами, или флюксиями». Характерно, что еще в 1730 г. переводчик Лопиталя на английский язык, пытаясь приспособить его учебник к запросам английских читателей, во всех постулатах и теоремах заменял слово «разность» через «флюксию». Такая путаница понятий говорит, с одной стороны, о том большом влиянии, которое оказывало более удобное и простое, хотя и менее обоснованное, исчисление бесконечно малых, пока ему не был закрыт доступ в умы англичан. С другой стороны, она показывает, что взгляды Ньютона были решительно не поняты большинством математиков того времени как из-за неясности изложения самого Ньютона, так и в силу незначительности той связи, которая существовала в то время между идеей предела и вычислительными приемами.

Спор, поддерживаемый и раздуваемый последователями Ньютона и Лейбница, привёл даже к ухудшению межгосударственных отношений между Англией и странами континентальной Европы. По крайней мере, в первой половине XVIII века над английской наукой тяготела традиция почитания Ньютона и его обозначений. Были и глубокие общественные причины, в силу которых английские математики не освобождались от флюксионных методов Ньютона. В их основе лежало чувство интеллектуального превосходства, которое формировалось и поддерживалось не только военными и торговыми победами англичан, но и тем восхищением, которое вызывала у континентальных философов английская политическая система. Англия стала жертвой своего воображаемого совершенства. Аналогичное явление мы наблюдали, рассматривая причины упадка древнегреческой математики. В обоих случаях неподходящие обозначения и методы затрудняли процесс продвижения вперёд. Хотя разработанная Лейбницем и его последователями форма анализа имела определенные преимущества, англоязычные математики упорно на протяжении всего XVIII века пользовались той формой анализа, которую ему придал Ньютон.

Важным событием в развитии идей обоснования математического анализа была публикация в 1734 году памфлета «Анналист», направленного против «неверующего математика» и критикующего сами основы флюксионного исчисления Ньютона. Его автором был известный английский философ, выдающийся представитель субъективного идеализма, епископ Джордж Беркли (1685–1753). Полное название памфлета «Аналист или рассуждение, обращённое к неверующему математику, где исследуется, более ли ясно воспринимаются или более ли очевидно выводятся предмет, принципы и умозаключения современного анализа, чем религиозные таинства и догматы веры» раскрывают его клерикальную направленность.

В своей содержательной части критика Беркли в равной степени была направлена против метода флюксий и исчисления дифференциалов. Она касалась двух вопросов.

Во-первых, исходя из своих философских воззрений, согласно которым существовать значило быть воспринимаемым, Беркли утверждал, что не только бесконечно малые, но даже величины, меньшие тысячной доли дюйма, не существуют, так как не воспринимаются человеческим глазом. По той же причине не существуют и бесконечно большие величины. Это возражение не очень беспокоило математиков.

Сложнее было возражать против критики применяемого Ньютоном алгоритма вывода флюксий, в котором даваемое переменной величине приращение омега (o) в начале рассуждения полагается не равным нулю, а в конце – равным нулю. В качестве примера такой алогичности Беркли выбрал приводимое Ньютоном построение флюксии степенной функции $y = x^n$, когда аргументу даётся не равное нулю приращение омега (o), находится соответствующее приращение функции $(x+o)^n - x^n$, которое после деления на o принимает вид $nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o \cdot x^{n-2} + \cdots$, в котором, положив o равным нулю, получают флюксию в виде nx^{n-1}.

Важно заметить, что автор «Аналиста» не ограничился одной критикой. Он попытался, и не безуспешно, ответить на вопрос, каким образом алогичные методы рассуждений, как правило, приводят к точным (правильным) результатам. Причиной этого, по мнению Беркли, была компенсация ошибок. Своё утверждение он проиллюстрировал на примере общепринятого в ту эпоху построения касательной TB в точке B параболы $y^2 = px$ (рис. 18), где $x = AP$, $y = PB$. В диф-

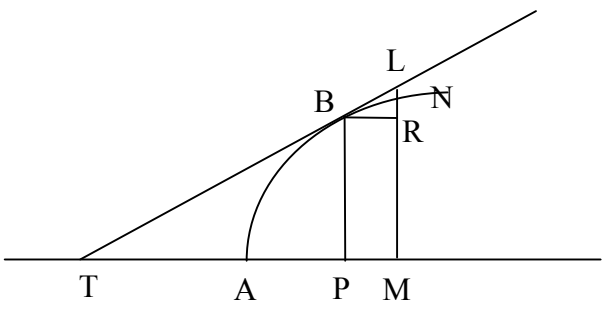


Рис. 18

ференциальном исчислении Лейбница кривая рассматривается как многоугольник с бесконечным числом бесконечно малых сторон, а касательная – как продолжение какой-либо такой стороны, например дуга BN, где N – точка, бесконечно близкая к B, есть прямой отрезок и треугольник TPB, где TP – подкасательная, подобен бесконечно малому треугольнику BRN, где $BR = PM = dx$ и $RN = dy$. Следовательно,

$$TP = y \cdot \frac{dx}{dy}. \tag{1}$$

С другой стороны, по правилам дифференциального исчисления

$$pdx = 2ydy, \tag{2}$$

так, что $TP\dfrac{2y^2}{p} = 2x$.

Точность полученного равенства не вызывала сомнений: ещё древние греки доказали без употребления принципов дифференциального исчисления, что подкасательная к параболе $y^2 = 2px$ равна удвоенной абсциссе точки пересечения.

На самом же деле, указывал Беркли, оба уравнения (1) и (2) неверны. Первое, потому что треугольник TPB подобен не фигуре BRN, а треугольнику BRL, где L – точка пересечения продолженной касательной и продолженной ординаты кривой, точным же является уравнение

$$TP = \frac{y \cdot dz}{dy + z}, \quad \text{где } z = NL.$$

Ложно и уравнение (2), основанное на отбрасывании высших степеней дифференциалов. Вместо него необходимо уравнение

$$pdx = 2ydy + (dy)^2, \tag{2′}$$

и поэтому на самом деле

$$TP = \frac{ydx}{\dfrac{pdx}{2y} - \dfrac{(dy)^2}{2y} + Z}. \tag{3′}$$

Далее, опираясь на исследования Аполлония Пергского, Беркли доказывает, что уравнение (3) и (3′) совпадают.

Таким образом, заключал Беркли, благодаря двойной ошибке приходят если не к научному познанию, то к истине.

«Аналист» Беркли вызвал многочисленные отклики и возражения прежде всего в Англии, Из них особый интерес представляет произведение Бенджамина Робинса (1707–1751), «Рассуждение о природе и истинности методов флюксий, а также первых и последних отношений сэра Исаака Ньюто-

на» (1735). В нем Робинс разъясняет и уточняет основные понятия, принятые в теории флюксий, и, прежде всего, тех, которые связаны с идеей предельного перехода. Дав определение предела переменной величины и отношения величин, Робинс доказывает несколько теорем о пределах и прежде всего о единственности предела, которое отсутствовало в работах Ньютона. Однако довести построение теории пределов до конца и с её помощью обосновать анализ Робинс не смог. Кроме того, математическая общественность была не готова к такому решению проблемы.

3. Представители английской школы анализа первой половины XVIII века. Обращаясь к деятельности англоязычных математиков первой половины XVIII века, естественно начать с Ньютона, которому на рубеже веков исполнилось 58 лет. Он был на вершине славы. Совсем недавно, в 1687 году, было опубликовано его фундаментальное произведение «Математические начала натуральной философии», и научный мир постигал всю глубину идей, заложенных в этом произведении. В 1704 году Ньютон опубликовал монографию «Перечисление линий третьего порядка», в которой дал классификацию плоских кривых третьей степени на 72 вида. Это было первым важным новым результатом, полученным путем применения алгебры к геометрии, так как все предыдущие работы были просто переводом Аполлония на алгебраический язык. К этому добавилась публикация давно написанных им произведений. В 1704 году увидела свет его работа о квадратуре кривых, написанная ещё в 1671 г., в результате чего научному миру стала известна теория флюксий. В 1707 г. вышла в свет «Всеобщая арифметика», написанная по материалам лекций, прочитанных Ньютоном в период с 1673 по 1683 годы. В 1711 году появилась в печати его работа о рядах, восходящая к 1669 году. Наконец, в 1736 году, уже посмертно, через 40 лет после написания, было опубликовано его произведение «Метод флюксий».

Его заслуги перед отечеством не оставались незамеченными. В 1695 году Ньютон получил должность смотрителя монетного двора, чему, очевидно, способствовало то, что он изучал свойства металлов. Ньютону было поручено руководство перечеканкой всей английской монеты. Ему удалось привести в порядок расстроенное монетное дело Англии, за что он получил в 1699 году пожизненное высокооплачиваемое звание директора Монетного двора. В том же году Ньютон был избран иностранным членом парижской академии наук. В 1705 году за научные труды он был возведён в дворянское достоинство. Похоронен Ньютон в 1727 году в английском национальном пантеоне – Вестминстерском аббатстве.

Одним из наиболее крупных представителей английской математической школы начала XVIII века, последовательно и с пониманием дела использующим понятия и символику теории флюксий, был Брук Тейлор (1685–1731). Шестнадцатилетним юношей Брук поступил в Кембриджский универ-

ситет, где обучался юриспруденции, но с не меньшим усердием и успехом занимался и математическими науками. В 1712 г. он был избран членом Лондонского королевского общества и в 1714–1718 гг. состоял его секретарем; он принимал активное участие в споре о приоритете. Первая математическая работа Тейлора, написанная в 1708 году и опубликованная в 1714 г., была посвящена теории колебания маятника.

Основным математическим сочинением Тейлора был «Прямой и обратный метод приращений» (1715). В этом труде Тейлор, выступая в качестве верного приверженца метода флюксий Ньютона, обогатил математику целым рядом важных открытий. Больше всего прославило его имя доказанная им теорема о разложении функций в степенные ряды. Хотя такие ряды были известны еще Грегори и Ньютону, а четверть века спустя – Лейбницу и И. Бернулли, Тейлор пришел к нему самостоятельно и первым опубликовал его. Доказанную им теорему Тейлор использовал при решении некоторых дифференциальных уравнений, а также для приближенного вычисления корней уравнения. В упомянутом выше труде «Прямой и обратный метод приращений» Тейлор положил начало математическому изучению задачи о колебании струны. Ему принадлежат заслуги в разработке теории конечных разностей. Тейлор также автор работ о перспективе, центре качания, полете снарядов, взаимодействии магнитов, капиллярности и др. К концу жизни занимался вопросами философии.

Ведущим английским математиком этого периода был Колин Маклорен (1698–1746), профессор Эдинбургского университета, как и Тейлор, последователь Ньютона, с которым он был лично знаком. Его исследования и обобщения флюксионного метода, работы по кривым второго и более высокого порядка и по притяжению эллипсоидов шли параллельно с исследованиями Клеро и Эйлера. Некоторые из теорем Маклорена вошли в нашу теорию плоских кривых и в нашу проективную геометрию. В 1733 г. Маклорен приступил к работе над трактатом, посвященном его исследованиям о притяжении эллипсоидов вращения. Однако уже через год, в 1734 г., с появлением упомянутого выше памфлета «Аналист», Маклорен существенно изменил структуру своего трактата, посвятив его значительную часть обоснованию метода исчисления флюксий. Саму работу, опубликованную в 1742 г., он назвал «Трактат о флюксиях». В предисловии к нему учёный писал: «Вышедшее в 1734 г. под названием «Аналист» письмо послужило первым поводом для появления этого трактата», целью которого является вывести основные положения флюксионного исчисления «на манер древних» «самыми строгими доказательствами».

Обращаясь к попытке Маклорена обосновать исчисление флюксий Ньютона, прежде всего заметим, что он был противником бесконечно малых, а

его представление о пределе было достаточно ясным. Последнее видно хотя бы из того, как он разбирает вопрос о площадях криволинейных трапеций, ограниченных сверху гиперболами высших порядков ($y = \frac{1}{x^n}$, *где* $n > 1$), в то время писали просто «площадь гиперболы». «Существует, – писал Маклорен,– некоторая конечная площадь, которой площадь такой гиперболы никогда не может стать равной, но к которой она, однако, настолько приближается, что избыток конечной площади над ней может стать меньше любой заданной площади, если продолжать кривую и асимптоту на некоторое определенное расстояние». Вместе с тем заметим, что в отличие от Робинса Маклорен в теоретической части книги практически не обращается к анализу понятия предела. Само обоснование метода флюксий Маклорен пытался осуществить, обращаясь к методам античных математиков, обобщив во введении основные приёмы и методы Евклида и Архимеда – доказательств от противного.

Только заложив в первой книге трактата синтетико-кинематический фундамент метода флюксий и уже показав его многочисленные приложения, Маклорен переходит к исчислению флюксий как таковому. Вновь, но уже в алгебраических обозначениях, выводит он с помощью приведения к нелепости основные правила дифференцирования, вводит обозначение флюксий с помощью точек, после чего немалой части предыдущего материала придает новое выражение. Попытка Маклорена построить новое исчисление на старом фундаменте успеха не имела. Маклорен пошёл почти против всего течения современного ему анализа, и в этом за ним последовать не могли даже сторонники метода пределов и флюксий Ньютона. В «Трактате о флюксиях» Маклорен оперирует рядами Тейлора, часто при x=0, которые многие современные учебники еще упорно называют рядом Маклорена. Вместе с тем в отличие от Тейлора, который не рассматривал вопросы сходимости рядов, Маклорен занимался этой проблемой и заложил основы таких исследований и даже владел так называемым интегральным признаком сходимости бесконечных рядов. Полностью важность ряда Тейлора была признана лишь после того, как Эйлер использовал его в своем «Дифференциальном исчислении» (1755). Лагранж добавил к нему остаточный член и положил его в основу своей теории функций.

Значителен вклад английских математиков XVIII века в развитие теории вероятностей, основы которой были заложены в XVII веке Ферма, Паскалем, Гюйгенсом и Я. Бернулли. Существенный вклад в развитие этой науки внёс Авраам де Муавр (1667–1754), опубликовавший в 1716 году книгу «Учение о случае». Французский гугенот, он поселился в Лондоне после отмены Нантского эдикта (1685 г.) и зарабатывал там на жизнь частными уроками. Имя де

Муавра связано с тригонометрической теоремой, которая в ее современной форме $(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ впервые появилась во «Введении» Эйлера. В статье, опубликованной в 1733 г., Муавр вывел функцию нормального распределения как аппроксимацию биноминального закона и дал формулу, равносильную формуле, выведенной Джеймсом Стирлингом, английским математиком школы Ньютона, опубликовавшим свой ряд в 1730 году. Многочисленные лотереи и страховые компании, которые организовывались в течение этого периода, вызвали у многих математиков, включая Эйлера, интерес к теории вероятностей. Это привело к попыткам применить учение о вероятностях в новых областях. Бюффон, известный как автор «Естественной истории» в 1777 г., – первый пример геометрической вероятности. Это была так называемая задача об игле, которая занимала многих, так как она давала возможность экспериментально определить число π, бросая иголку на плоскость, покрытую параллельными и равноудаленными прямыми, и подсчитывая число пересечений иголки с этими прямыми.

4. Представители континентальной школы анализа первой половины XVIII века. Континентальные математики, прежде всего благодаря деятельности Лейбница, братьев Бернулли и Лопиталя как автора учебника «Анализ бесконечно малых», успешно овладевали разработанным ими дифференциальным и интегральным исчислением. Сам Лейбниц, которому на рубеже веков исполнилось 54 года, продолжал вести обширную переписку почти со всеми крупнейшими учёными, а также политическими деятелями, не прекращая активной работы в области математических исследований, проводимых совместно со своими последователями. Не прекращал Лейбниц и организационной работы. В 1700 году он стал первым президентом созданного по его инициативе Бранденбургского научного общества, которое впоследствии было преобразовано в Берлинскую академию наук. В 1711, 1712 и 1716 годах Лейбниц встречался с Петром I, разработал по его просьбе ряд проектов по развитию образования и государственного управления в России. В 1714 году курфюрст ганноверский, на службе которого находился Лейбниц, не без его содействия вступил на английский престол под именем Георга I. Брать с собой в Англию Лейбница курфюрст не захотел. Последних два года своей жизни Лейбниц провёл в Ганновере, всеми покинутый и больной.

После смерти в 1704 году Лопиталя и в 1705 году – Якоба Бернулли на европейском континенте в два первых десятилетия XVIII века, помимо самого Лейбница, активную творческую работу в области математического анализа продолжал Иоганн Бернулли, и их с Я. Бернулли племянник Николай Бернулли I (1687–1759). Иоганн Бернулли в 1705 году вернулся из Гранингена в Базель, где занял освободившуюся кафедру брата. Продолжал исследования в области решения обыкновенных дифференциальных уравнений и ва-

риационного исчисления, много внимания уделяя проблемам механики: теории удара, движению тел в сопротивляющейся среде, учению о живой силе, понятие о которой заложил еще Лейбниц, и др. Основные труды Н. Бернулли I были посвящены теории вероятностей, теории рядов, дифференциальным уравнениям и демографии.

Не следует думать, что математиков континентальной Европы этого периода не волновали проблемы обоснования анализа бесконечно малых. Более того, несмотря на обилие замечательных результатов, полученных средствами дифференциального и интегрального исчислений, в среде континентальных математиков было немало противников анализа бесконечно малых. Среди них выделялся французский математик, член Парижской академии наук Мишель Роль (1652–1719), который в «Трактате по алгебре» развил метод отделения действительных корней алгебраических уравнений и исследовал решение в целых числах неопределенных линейных уравнений с двумя неизвестными. Его выступление с критикой анализа бесконечно малых в начале XVIII века вызвало оживленную дискуссию в среде континентальных математиков.

5. Леонард Эйлер и его математическое творчество. В третьем десятилетии XVIII века началась деятельность ведущего математика XVIII века Леонарда Эйлера. Родился Леонард в Базеле, в небогатой семье пастора Пауля Эйлера. Образование Леонард получил вначале у отца, который в молодости занимался математикой под руководством Я. Бернулли. Затем, поступив в 1720 году в Базельский университет, изучал математику под руководством Иоганна Бернулли. Был дружен с его сыновьями – Николаем Бернулли II (1695–1726) и Даниилом Бернулли (1700–1783). Оба были талантливыми математиками, однако найти в Базеле должность, соответствующую их уровню, не смогли, в связи с чем в 1725 году по приглашению Петербургской АН выехали в Петербург. К сожалению, Н. Бернулли II, не отличавшийся хорошим здоровьем, скончался в Петербурге в 1726 году. Его основные труды были посвящены дифференциальным уравнениям и механике. В теории вероятностей ему принадлежит так называемый «Петербургский парадокс». Его брат Даниил пробыл в Петербурге до 1733 года, после чего вернулся в Базель. Занимался физиологией и медициной, но больше всего математикой и механикой. В математике ему принадлежат: метод численного решения алгебраических уравнений с помощью возвратных рядов, работы по обыкновенным дифференциальным уравнениям, по теории вероятностей с приложением к статистике народонаселения. В работах, завершенных написанием «Гидродинамики» (1738), Д. Бернулли вывел основное уравнение стационарного движения идеальной жидкости, носящее его имя. Разрабатывал кинетические представления о газах. Вместе с Даламбером и Эйлером Даниил изучал теорию колебаний струн. Его отец и дядя развивали теорию обыкновенных

дифференциальных уравнений, Даниил же был пионером в области уравнений в частных производных.

В 1726 году по инициативе братьев Бернулли в Петербургскую академию наук был приглашен и молодой Эйлер. В Петербург он прибыл в мае 1727 года. Условия для научной деятельности были достаточно благоприятными: материальное обеспечение, широкая возможность публикации трудов, круг ученых с общими интересами в лице Д. Бернулли, Х. Гольдбаха, Я. Германа и других. Эйлер сразу приступил к занятиям математикой и механикой. Его статьи на латинском языке стали регулярно публиковаться в научном журнале академии. За 14 лет первого периода пребывания Эйлера в Петербурге он подготовил к печати около 80 трудов и опубликовал свыше 50. Большинство из них посвящено решению прикладных задач анализа и написаны с использованием символики и алгоритмов Лейбница. Написанная им в 1736 году «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» была первым учебником, в котором ньютоновская динамика материальной точки была развита аналитическими методами.

В этот период Эйлер участвовал во многих направлениях деятельности академии. Он читал лекции студентам академического университета, писал пособия, участвовал в технических экспертизах. Многие годы Эйлер успешно работал над составлением карт России. По специальному поручению академии Эйлер подготовил к печати «Морскую науку» – фундаментальный труд по теории кораблестроения и кораблевождения. Упорная работа при недостаточном освещении привела к болезни, в результате которой он в 1738 году ослеп на правый глаз.

Тревожное и неустойчивое положение в период регентства Анны Леопольдовны заставило Эйлера принять в 1741 году предложение прусского короля Фридриха II переехать в Берлин, где предстояла реорганизация почти бездействующего Общества наук в большую новую академию. В Берлинской академии наук Эйлер занял пост директора класса математики и члена правления, а после смерти её первого президента Мопертюи несколько лет (с 1759 г.) фактически руководил академией, вникая во все детали ее деятельности, вплоть до хозяйственных и финансовых дел. За 25 лет жизни в Берлине он полностью или начерно подготовил около 300 работ, среди них ряд солидных монографий и учебников. В годы жизни в Берлине Эйлер оставался деятельным сочленом Петербургской академии, печатая в её изданиях значительную часть своих работ, консультируя по различным вопросам, включая подбор сотрудников Академии и руководя занятиями командированных к нему молодых ученых. Трения Эйлера с королем Фридрихом II, связанные с расхождениями в деловых вопросах работы академии, но более всего с глубоким антагонизмом во многих взглядах и вкусах короля и ученого, посте-

пенно привели к разрыву между ними. Король долгое время не отпускал ученого с мировым именем, но Эйлер настоял на своем и в 1766 году вместе с семьей вернулся в Петербург.

Несмотря на преклонный возраст и постигшую его почти полную слепоту (правый глаз Эйлер потерял в 1738 г., а левый почти не видел с осени 1766 г.), работоспособность его не снижалась. Благодаря сохранившейся силе ума и феноменальной памяти, а также помощи способных молодых секретарей, его учеников, Эйлер смог до конца жизни по-прежнему продуктивно работать.

Одной из отличительных сторон творчества Эйлера является его исключительная продуктивность. Только при жизни Эйлера было опубликовано около 550 книг и статей, общий же список его трудов содержит примерно 850 названий. В 1909 году в Швейцарии было издано полное собрание его сочинений – более 70 томов.

Необычайно широк был круг занятий Эйлера, охватывающих все отделы современной ему математики и механики, математическую физику, теорию упругости, оптику, теорию музыки, теорию машин, баллистику, морскую науку, страховое дело и т.д. Около 60 процентов работ Эйлера относится к математике, остальные – преимущественно к её приложениям. К крупнейшим работам в области механики относятся уже упомянутая выше «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (2 тт., 1736), а также «Теория движения твердого тела» (1765). К числу наиболее крупных работ в области чистой математики можно отнести «Введение в анализ бесконечно малых» (2 тт., 1748), «Дифференциальное исчисление» (1755), «Универсальная арифметика» (2 тт., 1768–69), выдержавшая около 30 изданий на 60 языках, «Интегральное исчисление» (3 тт., 1768–70, 4 т., 1794) и другие. Особенностью этих руководств является постоянное стремление Эйлера раскрыть пути, ведущие к излагаемым результатам. Благодаря этому многие книги Эйлера и сейчас интересны не только для специалистов, но и для учащейся молодежи. В XVIII веке, а отчасти и в XIX огромной популярностью пользовались общедоступные «Письма о разных физических и философических науках, писанных к некоторой немецкой принцессе» (3 ч., 1768–74), которые выдержали свыше 40 изданий на 10 языках.

Математику Эйлер разрабатывал в значительной степени как аппарат естествознания, особенно механики и техники. Но Эйлер прежде всего был математиком. Часто черпая задачи из практики, он развивал математику не от случая к случаю, а как органическое целое, части которого находятся в тесной и глубокой взаимосвязи. Свои результаты и результаты, полученные другими, Эйлер систематизировал в ряде классических монографий, написанных с поразительной ясностью и снабжённых ценными примерами. Не-

возможно передать все доныне употребительные теории и методы Эйлера, из которых только немногие фигурируют в литературе под его именем.

Главным делом Эйлера как математика явилась разработка математического анализа, самые рамки которого он значительно расширил по сравнению со своими предшественниками. Он заложил основы математических дисциплин, которые только в зачаточном виде имелись или вообще отсутствовали в исчислении бесконечно малых Ньютона, Лейбница, Я. и И. Бернулли. Так, Эйлер первым систематически ввёл в рассмотрение функции комплексного аргумента («Введение в анализ бесконечно малых», т.1.) и исследовал свойства основных элементарных функций комплексного переменного (показательная, логарифмическая и тригонометрические функции). В частности, он вывел формулы, связывающие тригонометрические функции с показательной $e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$ Работы Эйлера в этом направлении, выяснение им некоторых свойств аналитических функций (уравнения Даламбера-Эйлера, связь с конформными отображениями) и, наконец, применение мнимых величин к вычислению интегралов положили начало теории функций комплексного переменного.

Эйлер явился создателем вариационного исчисления, изложенного в работе «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума…» (1744). Несколько позднее Лагранж существенно переработал и усовершенствовал метод Эйлера, ввёл понятие и знак вариации. После чего Эйлер оригинально изложил вариационное исчисление в ряде статей и «Интегральном исчислении». Метод, с помощью которого Эйлер в 1744 г. вывел необходимое условие экстремума функционала, явился прообразом прямых методов вариационного исчисления XX века. Позднее Эйлер ввёл в рассмотрение поле экстремалей.

На некоторых других важных результатах, полученных Эйлером в области математики, мы остановимся в следующей лекции, посвящённой деятельности математиков второй половины XVIII века.

6. Леонард Эйлер и обоснование анализа. В условиях систематического изложения анализа Эйлер естественно не мог обойти вниманием основные его понятия и методы. В связи с этим обратимся, прежде всего, к его трактовке понятия функции. Впервые термин «функция», в смысле зависимости одной величины от другой, и соответствующий символ употребил Лейбниц для обозначения отрезков, связанных с кривой, и таких, что длина их зависит от положения точки на кривой (ординаты, отрезки касательных, подкасательных, нормалей, поднормалей). В 1718 году И. Бернулли предложил считать, что функция есть просто аналитическое выражение. На ту же господствовавшую в то время позицию встал и Эйлер, дав следующее определение: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, состав-

ленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел, или постоянных количеств». При этом Эйлер допускал как действительные, так и мнимые значения аргумента. К числу допустимых операций Эйлер относил арифметические действия, степени, корни, решения алгебраических уравнений, а также элементарные трансцендентные функции: e^z, $\ln z$ – и тригонометрические функции. Наконец, в класс допустимых операций он включил интегрирование. Значительно позднее выяснилось, что поскольку к аргументу применяются только операции указанного выше класса, то и в результате будут получаться только функции аналитические всюду, кроме, может быть, изолированных особых точек, причем аналитичность сохраняется и в сколь угодно малой окрестности этих точек, где функция допускает разложения в обобщенный степенной ряд. Поведение функции в малом участке определяет, по Эйлеру, поведение ее в целом, что свидетельствует о существовании у него в то время идеи аналитического продолжения. В произведениях Эйлера, Даламбера и других математиков XVIII века встречались и другие определения функции, отражающие ту мысль, что соответствие является его основным признаком. Однако представление функции как аналитического выражения было доминирующим. Из того же определения функции как аналитического выражения выросло своеобразное определение непрерывности, в соответствии с которым функция считалась непрерывной, если она задавалась во всей области существования единым аналитическим выражением. Так, непрерывными оказывались функции: $y = \frac{1}{x}$, $y = tgx$ и т.д. Свойство непрерывности функции в смысле, привычном для нас, называлось связностью функции. Современному определению непрерывности мы обязаны двум математикам XIX века: О. Коши и Б. Больцано.

Остановимся теперь на вопросах обоснования анализа. Во «Введении в анализ бесконечных» (1748) Эйлер предпочёл обойтись без определения инфинитезимальных величин и без предварительного установления их свойств: в предисловии он писал, что развил в книге целый ряд вопросов, «благодаря которым читатели незаметно и как бы сверх ожидания могут освоиться с идеей бесконечного». Но уже в «Дифференциальном исчислении» (1755) мы находим у него новую концепцию анализа. Теперь Эйлер развивает своеобразное «исчисление нулей» (термин современных историков математики), вводя в исчисление бесконечно малых Лейбница идеи метода флюксий Ньютона. Дифференциальное исчисление Эйлер определяет как «Метод определения отношения исчезающих приращений, получаемых какими-либо функциями, когда переменному количеству, функциями которого они являются, дается исчезающее приращение». Таким образом, впервые объявляется, что именно производная является, по выражению Эйлера, «истинным объектом»

дифференциального исчисления, между тем как дифференциалу отводится, в сущности, вспомогательная роль. Вместе с тем, производная определяется не через понятие скорости, как в методе флюксий, но арифметически, как предел отношения конечных приращений, которые «становятся все меньшими и меньшими», а их отношения «всё более и более приближаются к некоторому определённому пределу, которого они достигают, однако лишь тогда, когда (приращения) полностью обращаются в нуль». Как видно, Эйлер примыкает к Ньютону и в том, что мыслит переменные величины, имеющие предел, достигающими, вообще говоря, своих предельных значений. Выдвинув понятие предела на первый план, Эйлер всё же не занялся разработкой самой теории пределов, он даже обходится без определения этого понятия. Для вычисления производных и дифференциалов применяется, как и ранее, принцип отбрасывания бесконечно малых, только обоснование его даётся в рамках «исчисления нулей».

В соответствии со своей трактовкой процесса стремления к пределу Эйлер считает бесконечно малую величину равной нулю. Он отвергает «особую категорию бесконечно малых величин, которые якобы не полностью исчезают, но сохраняют некоторое количество, которое, однако, меньше, чем всякое могущее быть заданным», ибо отбрасывание слагаемых такого рода нарушило бы современную точность анализа. Он отвергает и объяснение точности результатов компенсаций одних ошибок другими; напротив, получение правильных результатов без такого рода компенсаций, по его мнению, убедительно показывает, «что количества, которыми пренебрегают, надлежит считать совершенно и абсолютно равными нулю». Дифференциальное исчисление, по его мнению, безошибочно просто потому, что бесконечно малые суть абсолютные нули. И предел отношения $\Delta y/\Delta x$ при обращении Δx в нуль вычисляется вполне точно, когда в частном, уже сокращённом на Δx, это приращение полагается равным нулю. Вместе с тем, предел $\Delta y/\Delta x$ можно рассматривать как отношение двух равных нулю дифференциалов, как дробь dy/dx, где $dy = 0$ и $dx = 0$. Принципы исчисления нулей Эйлер изложил в третьей главе «Дифференциального исчисления». Прежде всего, он оспаривает то возражение, что говорить о делении нуля на нуль не имеет смысла. Нули, как утверждал Эйлер, можно сравнивать между собой двояко. Арифметическое отношение двух нулей есть отношение равенства, т.е. их разность есть нуль. Но геометрическое отношение двух нулей не есть отношение равенства и может иметь любое значение, ибо произведение любого числа на нуль равно нулю. В символах, поскольку для всякого n

$n \cdot 0 = 0$, то $0 : 0 = n : 1$, где n – любое число. Но в дифференциальном исчислении – и это основной пункт концепции Эйлера – частное двух нулей, выступающих под видом отношения двух бесконечно малых приращений

функции и её аргумента или же их дифференциалов, перестаёт быть неопределённым. При буквальном понимании некоторые высказывания Эйлера звучат в настоящее время непривычно. Различные бесконечно малые или нули, говорит он, следует во избежание путаницы, обозначать различными символами, например dx, dy и т.д., ибо они могут иметь различные отношения. Когда обозначения фиксируются, неопредёленность исчезает: так, отношение $adx:dx$, где $a-$ конечное отличное от нуля число, уже перестаёт быть неопределённым, но равно $a:1$. После этого основные правила вычисления дифференциальных отношений формулируются как в форме принципа отбрасывания бесконечно малых, так и в форме, соответствующей предельному переходу:

$$a \pm ndx = a \text{ и } \frac{a \pm ndx}{a} = 1, \text{ а также при } n > m$$

$$adx^m \pm bdx^n = adx^m \text{ и } \frac{adx^m \pm bdx^n}{adx^m} = 1.$$

В некоторых трудах по истории математики все эти рассуждения Эйлера до сих пор характеризуются как полностью лишённые строгости и даже смысла. Однако обороты речи, характерные для XVIII в., не должны скрывать реального математического содержания концепции Эйлера, вовсе не вступающей в конфликт с логикой и здравым смыслом. Отношение двух нулей у него есть не что иное, как предельное значение функции $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, предполагаемой непрерывной для всех рассматриваемых значений аргумента, включая $x = x_0$, а его правила учат, в частности, находить искомое предельное значение, подставляя $\Delta x = 0$ в разложение этой дроби по степени Δx.

Исчисление нулей образует лишь одну опору концепции анализа Эйлера, другой служит представление функции степенными рядами, которое играет основную роль уже в фактическом вычислении дифференциалов и их отношений, т.е. производных. Формулы конечных разностей служат отправным пунктом изучения природы дифференциалов любого порядка: дифференциал функции в согласии с традицией школы Лейбница определяется как её бесконечно малая разность. Если разложение конечной разности какой-либо функции y по степеням ω, конечной разности аргумента x, дано $\Delta y = P\varpi + Q\omega^2 + R\omega^3 + \cdots$, где P, Q, $R\cdots -$ функции x, то dy находится непосредственно, без отыскания предела отношения $\Delta y/\Delta x$. Здесь вступает в действие принцип отбрасывания бесконечно малых, который Эйлер без каких-либо пояснений распространяет на бесконечное число членов степенного разложения (аналитической) функции, порядок малости которых бесконечно

возрастает. Именно: если бесконечно малые приращения Δy и ω обозначить, соответственно, dy и dx, то все члены ряда, следующие за первым, как исчезающие в сравнении с ним, могут быть отброшены, и значит $dy = Pdx$. Таким образом, «для нахождения … дифференциала y достаточно знать одну только функцию P», и «если известна конечная разность какой-либо функции, то очень легко найти её дифференциал». Именно так выведены Эйлером дифференциалы степенной функции, частного, логарифмической функции, синуса, косинуса и некоторых других функций. Отсюда было уже недалеко до прямого определения предела как коэффициента линейного члена ряда Тейлора. Однако и эта опора, т.е. представления функции степенными рядами, не была достаточно обоснованной. Хотя математики XVIII века отличали сходящиеся ряды от расходящихся и даже установили несколько критериев сходимости и области сходимости отдельных разложений, все же в целом их подход к бесконечным рядам резко отличался от современного. Исходя из предполагаемого единства основных законов алгебры и анализа, математики XVIII века формально переносили свойства конечных целых многочленов на бесконечные ряды. В правомерности такой практики сомневались столь же мало, как в возможности представить любую функцию степенным рядом. Несмотря на это, подавляющее большинство результатов было верным, от ошибок предохраняло либо то обстоятельство, что не выходили за рамки, в которых соответствующие операции действительно возможны, либо интуиция. В этом отношении Эйлер не представлял исключения. Однако иногда он испытывал неудовлетворенность и искал все новые и новые доказательства некоторых важных теорем, например теоремы о биноме.

Охарактеризованные выше идеи Эйлера оказали значительное влияние на дальнейшие работы по основаниям анализа. Это относится, в частности, к выдвижению на первый план производной как предела отношения $\Delta y/\Delta x$ и к широкому применению ряда Тейлора. Но понимание бесконечно малых как нулей, при всём авторитете Эйлера, могло явиться только недолгим этапом в истории этого понятия и не привлекло большого числа сторонников.

Дальнейшее развитие в XVIII в. получило и интегральное исчисление. Поучительно в этом отношении сочинение Эйлера «Интегральное исчисление» (3 тт., 1768–1770), которое явилось настольной книгой и источником вдохновения крупнейших математиков 2-й половины XVIII века. Основным понятием для Л. Эйлера являлось понятие об интеграле как первообразной. Интеграл с произвольной постоянной величиной назывался полным, а с фиксированной – частным. Позднее значение частного интеграла, при каком-либо значении аргумента, стали называть определенным интегралом. В центре учения о неопределенных интегралах находилась разработка различных

приемов интегрирования в элементарных функциях, круг которых сам Эйлер и выделил. Почти все приемы, излагаемые в современных учебниках, можно найти в его трактатах. Эйлер не ограничился систематизацией прежних и разработкой новых приемов вычисления неопределенных интегралов, но существенно развил теорию определенных интегралов, для которых ввел позднее специальный знак $\int Pdx\begin{bmatrix} om\ x=a \\ do\ x=b \end{bmatrix}$ (термин «определенный интеграл» предложил в 1779 Лаплас, а современный знак $\int_a^b f(x)dx$ – в 1817-22 Ж. Фурье). Также Л. Эйлер вычислил большое количество важных несобственных интегралов, например $\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$, и заложил основы теории Г-функции и В-функции. В 1777-1778 гг. Эйлер впервые применил к вычислению определенных интегралов функции комплексного переменного (опубл. 1793–1797); почти тогда же П. Лаплас (1782) вычислил первые интегралы с мнимыми пределами (опубл. 1785). В середине XVIII века Эйлер и Лагранж свободно владели двойными и тройными интегралами. Первое изложение теории двойных интегралов опубликовал Л. Эйлер в 1770 году. Вслед за ним в 1772 Ж. Лагранж ввел тройные интегралы. Криволинейные интегралы были еще ранее рассмотрены А. Клеро (1743).

Лекция 15. Математика второй половины XVIII века, французская математическая школа

План лекций:

1. Особенности развития математики во второй половине XVIII века.
2. Математическое творчество А.Клеро.
3. Математическое творчество Ж. Даламбера.
4. Математическое творчество Ж. Лагранжа.
5. Математическое творчество П. Лапласа.
6. Математическое творчество и общественная деятельность Г. Монжа.
7. Математическое творчество А. Лежандра.
8. Математическое творчество Ж. Фурье.
9. «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых» Л. Карно.

1. Особенности развития математики во второй половине XVIII века. Бурное развитие математического анализа в первой половине XVIII века, предопределенное торжеством механистической концепции, продолжалось и во второй его половине. Все отчетливее становилась наметившаяся еще при Лейбнице и развитая Эйлером дифференциация анализа. Под воздействием внутренних потребностей самой математики, а также запросов естествознания, более всего механики, дифференциальное и интегральное исчисление распространилось на функции многих переменных. Впервые были введены элементарные функции комплексного переменного, которые вскоре нашли применение в решении уравнений с частными производными и в картографии, которая поставила перед математиками несколько важных и трудных задач. В рамках интегрального исчисления, отчасти в связи с решением дифференциальных уравнений математической физики, а отчасти развитием ранее поставленных геометрических задач, выделилось учение об определенных интегралах и специальных функциях. В середине XVIII в. выделилась как новая отрасль анализа теория дифференциальных уравнений, разделившаяся на две ветви: теория обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Их развитие стимулировалось механикой, поставлявшей всё новые и новые классы уравнений и их систем, для решения которых приходилось прибегать к бесконечным рядам – степенным, обобщённым степенным, тригонометрическим и некоторым другим разложениям по ортогональным функциям. Так же в середине XVIII в. оформилось в самостоятельную дисциплину вариационное исчисление. Наконец, тогда же велась определенная работа в области оснований анализа, нередко в форме

острых дискуссий о понятиях бесконечно малой величины и предела, о допустимом объёме понятия функция и о допустимости расходящихся рядов и т.д. И если механика становилась наукой аналитической, то анализ постепенно всё более выходил из-под господства геометрических или механистических представлений, и мышление аналитиков приобретало специфический алгебраико-арифметический характер.

Успехи анализа в немалой степени отразились на развитии других математических наук, и его методы проникали в теорию чисел, алгебру, учение о конечных разностях, теорию вероятностей, геометрию. В алгебре принципиально новые идеи были порождены в ходе изучения вопроса о приводимости уравнений; здесь зарождалось уже теоретико-групповое мышление. В теории вероятностей была установлена центральная предельная теорема, теоремы о вероятностях гипотезы, выполнены работы по теории ошибок, приложению к статистике народонаселения и страховому делу.

В геометрии, наряду с дальнейшим прогрессом аналитической и особенно дифференциальной геометрии пространственных кривых и поверхностей, а также с применением некоторых новых важных преобразований, следует особо отметить развитие новых методов начертательной геометрии, подготовлявшее почву, прежде всего, для проективной геометрии.

Дифференциация математики не влекла за собой утраты единства этой науки. Напротив, по мере возникновения её отделов усиливались внутренние связи между ними, понятия и методы одних областей плодотворно применялись в других. Математика развивалась как единое целое.

Хотя Л. Эйлер и во второй половине XVIII века, вплоть до своей смерти в 1783 году, продолжал свою плодотворную математическую деятельность, на первый план стала выдвигаться группа французских математиков. Первыми из них, по времени рождения, были Алексис Клеро и Жан ле Рон Даламбер, активное математическое творчество которых началось еще в первой половине XVIII века. Наиболее яркими представителями французской математической школы второй половины XVIII века были Жозеф Луи Лагранж и Пьер Симон Лаплас. Большую роль в становлении и развитии французской математической школы сыграл Госпар Монж, активно участвовавший в создании Высшей нормальной школы и Политехнической школы в Париже.

2. Математическое творчество А. Клеро. Алексис Клод Клеро (1713–1768) – французский математик**.** Ещё в возрасте семнадцати лет он опубликовал «Изыскания о кривых двоякой кривизны» – первый опыт в области аналитической и дифференциальной геометрии пространственных кривых. В 1737 г. А. Клеро участвовал в экспедиции в Лапландию, организованной французской академией наук для выяснения истинной формы земного шара (вытянут он или сплюснут у полюсов). Руководил экспедицией известный французский физик, астроном и геодезист Пьер Мопертюи (1698–1759). По-

сле возвращения из Лапландии в 1743 г. Клеро опубликовал свою «Теорию фигуры Земли» – образцовое произведение по гидростатике и притяжению эллипсоидов вращения, в котором доказал ряд фундаментальных для высшей геодезии теорем. За этой книгой последовала «Теория Луны» (1751), содержавшая дополнения к эйлеровой теории движения Луны и к общей задаче трех тел. В математическом анализе Клеро ввел понятие криволинейного интеграла и полного дифференциала функции нескольких независимых переменных, а также общего и особого решения дифференциальных уравнений первого порядка. Один из типов рассмотренных им дифференциальных уравнений, а именно уравнение $y = xy' + f(y')$, где f – заданная дифференцируемая функция, известен под его именем, и с этим связан один из первых примеров особых решений. На основе изучения движения кометы Галлея в 1759 г. Клеро определил момент её предстоящего прохождения через перигелий. В механике он создал динамическую теорию относительного движения.

3. Математическое творчество Ж. Даламбера. Жан ле Рон Даламбер (1717–1783 – французский математик, внебрачный сын маркизы де Тенсен и артиллерийского офицера Детуша – вскоре после рождения был подкинут матерью на ступени маленькой церкви св. Жана ле Рон у собора Парижской богоматери, чем и объясняется его имя. Приходские власти отдали найденыша жене бедного стекольщика, которая воспитала мальчика как собственного сына. Фамилия Даламбер (собственно д'Аламбер) произведена из имени его приемного отца Аламбера, а его родной отец Детуш был принужден законом платить за воспитание ребенка. Став знаменитостью и гордостью французской науки, Ж. Даламбер оказывал своим приемным родителям всемерную систематическую помощь и всегда с гордостью называл их своими родителями. Учился Даламбер в колледже Мазарини, а затем в академии юридических наук и получил звание бакалавра искусств и лиценциата прав, однако профессия адвоката ему была не по душе, и он стал изучать математику. Уже в 1739 и 1740 гг. Даламбер представил Парижской академии наук свои сочинения о движении твердых тел в жидкости и об интегральном исчислении и в 1741 г. был избран ее адъюнктом. В 1743 г. в Париже вышел его «Трактат о динамике», в котором был предложен так называемый «принцип Даламбера», позволяющий весьма общим образом приводить задачи, относящиеся к движению несвободной системы, к задачам статики. Он продолжал писать по многим прикладным вопросам, и прежде всего по гидродинамике, аэродинамике и задаче трех тел. В частности, он доказал существование наряду с океанскими приливами воздушных приливов, а в 1747 г. опубликовал в Берлине «Размышления об общей природе ветров». Выдающийся вклад внес Даламбер и в небесную механику, обосновав теорию возмущения планет и теорию предварения равноденствий и нутации. Тогда же Даламбер опубликовал тео-

рию колебания струны, заложив тем самым вместе с Д. Бернулли основания теории уравнений в частных производных и математической физики. В 1748 г. вышли его «Исследования по интегральному исчислению», в которых, в частности, содержалось хотя и недостаточно строгое, но первое доказательство основной теоремы алгебры, сформулированной задолго до него Р. Декартом.

С 1750 г. Даламбер принимает деятельное участие в организованном Д. Дидро издании «Энциклопедии», о которой говорилось в пункте первом предыдущей лекции. В первом томе «Энциклопедии» (1751) была помещена обширная вступительная статья Даламбера о происхождении и развитии наук. Перу Ж. Даламбера принадлежит в «Энциклопедии» множество разнообразных статей, в том числе по математике. Блестящие по форме и весьма содержательные, хотя нередко и спорные, они оказали большое влияние на развитие математической мысли и образования во второй половине XVIII века. Вольнодумная по общему своему направлению «Энциклопедия» имела влиятельных противников, которых поддерживали правительство Франции и католическая церковь. Когда нападки реакционных кругов, затронувшие и непосредственно Даламбера, усилились, он вышел из редакции, но остался одним из авторов «Энциклопедии» и другом Дидро, который, обладая большим гражданским мужеством, довел её издание до конца.

В 1756 г. Ж. Даламбер получил академическое звание, дающее право на государственное жалование. В 1764 г. Петербургская академия избрала его своим иностранным членом, а в 1772 г. он стал непременным Секретарем французской академии наук и в качестве такового – наиболее влиятельным ученым Франции.

Основные математические труды Даламбера относятся к теории дифференциальных уравнений, где он дал метод решения дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными, выражающими малые колебания бесконечно тонкой однородной струны (волнового уравнения). Вскоре были опубликованы аналогичные исследования в области колебаний струны Л. Эйлера и Д. Бернулли. Однако их подходы к решению этой задачи, примененные методы, а также полученные результаты оказались различными. Тогда как Даламбер и Эйлер нашли решение уравнения $z''_{tt} = K^2 \cdot z''_{xx}$ в виде суммы двух произвольных функций $f(x+kt) + \varphi(x-kt)$, Д. Бернулли решил это уравнение при помощи тригонометрических рядов. Возникли серьезные сомнения относительно характера этого решения: Ж. Даламбер считал, что начальная форма струны может быть задана только одним единственным аналитическим выражением, в то время как Эйлер полагал, что допустима любая непрерывная кривая. Д. Бернулли же, вопреки Эйлеру, утверждал, что его решение в виде тригонометрического ряда является вполне

общим. Расхождения во мнениях положило начало знаменитой дискуссии о природе функций, входящих в интегралы уравнений математической физики. Полного разъяснения этого вопроса пришлось ждать до 1824 г., когда Ж. Фурье (1768–1830) устранил сомнения относительно законности представления «любой» функции тригонометрическим рядом.

При решении одного дифференциального уравнения с частными производными эллиптического типа, встретившегося в гидродинамике, Ж. Даламбер впервые применил функции комплексного переменного. У Даламбера (а вместе с тем и у Л Эйлера) встречаются те уравнения, связывающие действительную и мнимую части аналитической функции, которые впоследствии получили название уравнений Коши – Римана. Даламберу принадлежат также важные результаты в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений 1-го и 2-го порядка.

В теории рядов его имя носит широко употребляемый достаточный признак сходимости рядов, а в алгебре, как уже упоминалось выше, первое, правда не очень строгое (со многими допущениями), доказательство основной теоремы алгебры.

Вскоре после публикации Эйлером «Дифференциального исчисления» Даламбер выступил с идеей построения анализа на основе понятия предела и производной, не употребляя, впрочем, этого последнего термина. Свои воззрения Даламбер рассматривал как развитие идей исчисления флюксий Ньютона, правда, освобожденных от механических представлений. «Ньютон, – писал Даламбер, – исходил из другого принципа, т.е. не из принципа бесконечно малых, и можно сказать, что метод этого великого математика, данный в его исчислении флюксий, очень точен и ясен, хотя Ньютон и ограничился тем, что лишь бегло очертил его. Ньютон никогда не считал дифференциальное исчисление исчислением бесконечно малых величин, а видел в нем метод первых и последних отношений, т.е. метод определения пределов отношений. Этот знаменитый ученый никогда поэтому не дифференцировал величины, но только уравнения, ибо всякое уравнение заключает в себе отношение между двумя переменными, и дифференцирование состоит только в определении пределов отношений между конечными разностями содержащихся в уравнении двух переменных». Следуя этой концепции, Даламбер утверждал, что в дифференциальном исчислении речь должна идти вовсе не о бесконечно малых величинах, но только о пределах конечных величин. Явного определения дифференциала Даламбер не дает, но из текста его статей следует, что для него dx и dy – просто величины, частное которых равно пределу, обозначенному $\frac{dy}{dx}$. Хотя в его рассуждениях присутствует введенное

Эйлером понятие производной, однако, как уже отмечалось выше, термин этот им нигде не используется. Понятие предела определено Даламбером в «Энциклопедии» следующим образом: «Говорят, что одна величина является пределом другой величины, если эта вторая может стать к первой ближе, чем на любую данную величину, как бы мала ни была последняя, причем, однако, приближающаяся величина никогда не может превзойти величину, к которой приближается. Таким образом, разность этой величины и ее предела абсолютно неуказуема», и к этому добавлено: «предел никогда не совпадает или не становится равным величине, для которой он является пределом». В качестве иллюстрации приведены последовательности вписанных и описанных около круга многоугольников и частичных сумм убывающей геометрической прогрессии. Из текста следует, что переменная величина мыслится изменяющейся монотонно, хотя это и не оговорено в определении. Из теорем, касающихся свойств предела, приведены две: о единственности предела и о пределе произведения, – вторая используется для доказательства того, что площадь круга выражается произведением полуокружности на радиус.

Хотя Даламбер полагал, что «Метафизика дифференциального исчисления, о котором так много писали, еще важнее и, быть может, с большим трудом поддается разработке, чем сами правила этого исчисления», он лично ограничился общей характеристикой метода пределов, предоставив его дальнейшую разработку и применение к построению системы анализа другими математиками. Одним из таких курсов, в которых, по крайней мере, отчасти, были воспроизведены мысли Даламбера, явилось сочинение, написанное швейцарским математиком Симоном Люилье (1750–1840). В первой главе этого сочинения метод пределов получил некоторое продолжение и развитие. К двум теоремам о пределах, приведенных Даламбером, Люилье добавил теорему о пределе отношения двух переменных величин и впервые ввел знак предела в виде $\lim$. Впервые же производная какой-либо функции P (у Люилье «дифференциальное отношение») обозначается $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$, а символ $\frac{dy}{dx}$ рассматривается как единое целое, а не дробь. Термином «бесконечно малая величина» Люилье не пользуется, сохраняя его для обозначения актуально бесконечно малых; нет у него и понятия о дифференциале.

Даламберу и его последователям принадлежит заслуга дальнейшей разработки учения о предельных переходах в рамках чистого анализа. Но в той конкретной форме, которую метод пределов приобрел в рассматриваемое время, он еще не имел преимуществ в смысле строгости перед исчислением бесконечно малых. Определение предела, ограниченное монотонными переменными, было недостаточным: ведь ни сумма, ни произведение двух монотонных величин, из которых одна возрастает, а другая убывает, не являются, вообще говоря, монотонными. Арсенал понятий и общих теорем метода пре-

делов оставался недостаточным, и его едва хватало только для доказательства уже известных и ранее доказанных предложений.

4. Математическое творчество Ж. Лагранжа. Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) – французский математик, родился в Турине в итало-французской семье обедневшего чиновника. Первые школьные интересы Лагранжа были сосредоточены на древних языках, и более или менее случайно то, что у него развилась страсть к математике. Уже в 17 лет Лагранж мог без чьей-либо помощи изучать сочинения И. Ньютона, Г. Лейбница, братьев Бернулли и Эйлера. Девятнадцати лет от роду он стал профессором математики артиллерийской школы в Турине и читал лекции студентам, которые все были старше его. Вскоре из наиболее способных он организовал научное общество, которое выросло затем в Туринскую академию наук. Первый том трудов академии вышел в 1759 г., когда Лагранжу было 23 года. Принято считать, что скромному и непритязательному Лагранжу обязана своим появлением большая часть изящных математических фактов в этих ранних трудах, опубликованных другими авторами. Сам Лагранж представил статью о максимумах и минимумах (по вариационному исчислению). В ней он обещал развить рассмотрение вопроса и вывести из него всю механику – как твердого, так и жидкого тела. Так Лагранж, 23 лет от роду, подошел к своему шедевру, к «Аналитической механике», над которой он работал многие годы и которая была опубликована лишь в 1788 году, когда ему было уже 52 года. «Аналитическая механика» Лагранжа – это, может быть, наиболее ценный его труд, который все еще заслуживает тщательного изучения. В нем отчетливо выявились особенности его мышления как чистого аналитика. «В этой работе вовсе нет чертежей, в ней только алгебраические операции», – писал Лагранж в предисловии к «Аналитической механике». Выполненная Ж. Лагранжем аналитическая обработка механики отмечает первый полный разрыв с традицией древних греков. И. Ньютон, его современники и его непосредственные продолжатели постоянно пользовались чертежами, помогавшими им при исследовании задач механики. Лагранж показал, что большая гибкость и несравненно большая мощь достигаются, если общие аналитические методы используются с самого начала. В этой книге, которая появилась через сто лет после «Начал» Ньютона, вся мощь усовершенствованного анализа использована в механике точек и твердых тел. Результаты Эйлера, Даламбера и других математиков восемнадцатого столетия здесь обработаны и развиты с единой точки зрения. Существенную роль в создании «Аналитической механики» сыграло созданное им в период с 1760 по 1761 гг. чисто аналитическое вариационное исчисление, в котором не только много оригинальных открытий, в частности введено понятие и знак вариации, но и отлично упорядочен и переработан накопленный исторический материал, что так характерно для

всего творчества Лагранжа. Разработанное им исчисление Лагранж сразу применил к задачам динамики, полностью используя формулировку Эйлера принципа наименьшего действия. Благодаря полному использованию вариационного исчисления Лагранж смог объединить различные принципы статики и динамики, в статике – путем использования принципа виртуальных скоростей, в динамике – принципа Даламбера. Это естественным образом привело к обобщенным координатам и к уравнениям движения в их лагранжевой форме.

В том же туринском томе Лагранж сделал другой большой шаг вперед, применив анализ к теории вероятностей. Существенно развил он и учение о звуке, включив его в механику упругих сред, а не в механику жидкостей, как это делали до него. Действуя в том же общем направлении, он включился в длившийся годами спор между ведущими математиками о правильной математической формулировке задачи о колебаниях струны – важнейшей задачи всей теории колебаний.

В 1764 г. Ж. Лагранжу была присуждена Большая премия Парижской академии наук за решение задачи либрации Луны. Почему Луна всегда обращена к Земле одной стороной и при этом имеются некоторые небольшие непонятные неправильности в ее движении? Эта задача является примером знаменитой задачи трех тел: в данном случае это Земля, Солнце, Луна, взаимно притягивающие друг друга обратно пропорционально квадрату расстояний между их центрами тяжести. Вторую такую же премию Лагранж получил в 1766 году за приближенное решение задачи, объясняющее неправильности в движении четырех известных к тому времени спутников Юпитера.

Напряженная работа, неупорядоченный образ жизни, прежде всего питания, подорвали его здоровье, доставлявшее ему постоянное беспокойство. Преданным другом и великодушным поклонником Лагранжа был Даламбер, бывший на 19 лет старше Лагранжа, с которым он поддерживал систематическую переписку не только по математическим вопросам. Очень благосклонно относился к нему и Эйлер, поддержавший молодого талантливого математика своим авторитетом. Так, например, несмотря на необычно молодой возраст Лагранжа, ему в то время было всего 23 года, Л. Эйлер добился избрания Лагранжа иностранным членом Берлинской академии наук. Это официальное признание за границей было большой помощью для Лагранжа на родине. В одной из своих работ Эйлер специально сообщает, как его задержали трудности, казавшиеся непреодолимыми, пока Лагранж не указал способ их преодоления.

В 1766 г., когда Л. Эйлер уехал из Берлина в Петербург, Фридрих Великий пригласил Ж. Лагранжа на должность директора математического класса Берлинской академии наук. В Берлине коллеги по академии, оскорбленные

тем, что Фридрих поставил над ними иностранца, относились к Лагранжу более чем холодно, что отчасти компенсировалось на редкость благосклонным отношением короля. В этих сложных условиях Лагранжа выручало то, что он был не только первоклассным математиком, но и человеком, удивительно мягким и деликатным, обладающим редким даром не говорить ничего лишнего. Пока его коллеги не привыкли к его присутствию, он старался реже попадаться им на глаза. В Берлине Лагранж продолжал свои исследования в области небесной механики. За решение задач о трех телах, о движении Луны, возмущении комет и ряда других проблем Лагранж был удостоен Больших премий Парижской АН в 1772, 1774 и 1778 годах. Такого рода применение ньютоновой теории представляло для Лагранжа наибольший интерес в течение всей его активной жизни. Однако было бы неверным утверждать, что все основные усилия Ж. Лагранжа во время его пребывания в Берлине сводились к небесной механике и доведению до совершенства «Аналитической механики». Лагранжу принадлежат выдающиеся исследования по математическому анализу, алгебре и теории чисел. В 1767 г. появились его мемуары «О решении численных уравнений», в которых он изложил методы отделения вещественных корней алгебраического уравнения и их приближенного вычисления с помощью непрерывных дробей. За этим в 1770 г. последовали «Размышления об алгебраическом решении уравнений», в которых рассматривается основной вопрос: почему те методы, которые позволяют решать уравнения не выше четвертой степени, ничего не дают для уравнений степени, большей четырех? Это привело Лагранжа к рациональным функциям от корней и к исследованию их поведения при перестановках корней. Такой метод не только был стимулом для П. Руффини и Н. Абеля в их работах относительно случая $n>4$, но он привел Э. Галуа к его теории групп. Лагранж также продвинул теорию чисел, в которой он исследовал квадратичные вычеты, и среди ряда других теорем доказал то, что каждое целое число есть сумма четырех или меньшего числа квадратов.

После смерти Фридриха Великого (1786) Берлин стал неподходящим местом жительства для Лагранжа и его коллег-иностранцев, связанных с академией; и он стал добиваться отставки. Она была ему разрешена с условием, что он будет посылать статьи в Берлинскую академию в течение нескольких лет, на что Лагранж согласился. Он с радостью принял приглашение Людовика XVI продолжать математические исследования в Париже в качестве члена Французской академии. По прибытии в Париж в 1787 г. Ж. Лагранж был с большими почестями принят представителями королевской фамилии, а также академией. В Лувре ему была отведена комфортабельная квартира, в которой он жил до самой революции.

В возрасте 50 лет Лагранж почувствовал, что силы его иссякли. Это был классический случай нервного истощения, вызванного длительным и чрезмерным переутомлением. Устав от всего, что связано с математикой, Лагранж обратился теперь к тому, что считал своими подлинным интересом – как сделал это Ньютон после написания «Начал», – именно к философии, эволюции мышления, истории религии, общей теории языков, медицине и ботанике. Увлекшись этой странной смесью, он удивил своих друзей обширными познаниями и проницательностью ума по вопросам, далеким от математики.

Что касается математики, то Лагранж считал её законченной или, по крайней мере, вступившей в период упадка. Он считал, что в будущем лучшие умы человечества проявят наибольший интерес к химии, физике и естественным наукам вообще, предрекал, что кафедры математики в академиях и университетах вскоре опустятся до уровня незаметных кафедр арабского языка.

Революция вывела Лагранжа из апатии и гальванизировала еще раз его математические интересы. Когда французская аристократия и ученые, наконец, поняли, какие надвигаются события, они стали убеждать Лагранжа возвратиться в Берлин, но он отказался, сказав, что предпочитает остаться и увидеть «эксперимент» полностью. Ни он, ни его друзья не предвидели надвигающегося террора, и, когда он наступил, Лагранж пожалел о том, что оставался до тех пор, пока не стало слишком поздно бежать.

Новые власти относились к Лагранжу терпимо. Специальным декретом ему была пожалована «пенсия», а когда инфляция свела эту пенсию практически к нулю, его назначили членом Комитета изобретений, затем Комитета монетного дела, чтобы дать ему возможность существовать. В 1795 г. была учреждена Нормальная школа, и Лагранж стал её профессором математики. Когда Нормальная школа закрылась и была основана знаменитая Политехническая школа (1797), Лагранж составил план курса математики в ней и стал её первым профессором. Ему пришлось читать лекции для слабо подготовленных студентов. Приспосабливаясь к уровню знаний своих студентов, Лагранж повел их через арифметику и алгебру к анализу сам, напоминая больше ученика, чем профессора. Уйдя значительно дальше элементарного уровня, Лагранж на глазах своих учеников развивал новую математику, и вскоре они сами приняли участие в её развитии. Так как наибольшие трудности его ученики испытывали при знакомстве с понятиями бесконечно малого и бесконечно большого, Лагранж решил освободить анализ от этих понятий. Для него это было тем более естественным, что подобная идея зародилась у него еще в туринский период его жизни. Тогда в своих публикациях (1760–1761) Лагранж высказал убеждение, что исчисление бесконечно малых есть по существу исчисление компенсирующихся ошибок, которое «исправляет само

собой принимаемые в нём логические допущения». Этот тезис Лагранж иллюстрировал примером касательной к кривой, т.е. в сущности примером Беркли, но, в отличие от последнего, ограничился замечанием общего характера, относящимся к любым кривым. В семидесятые годы Лагранж пришёл к мысли заменить исчисление бесконечно малых новой теорией производных функций. Эту мысль он впервые высказал в мемуарах «О новом роде исчисления, относящегося к дифференцированию и интегрированию переменных величин» (1772). Она, эта мысль, заключалась в следующем: при записи разложения функции u от $x+\xi$ по степеням ξ в форме

$$u + u'\xi + \frac{u''}{2}\xi^2 + \frac{u'''}{2\cdot 3}\xi^3 + \cdots$$

Функции u, u', u'', u''',… последовательно получаются одна за другой, начиная с u', по одному и тому же правилу: каждая из них есть коэффициент при первой степени в разложении по степеням ξ, ей предшествующей функции. Таким образом, все эти функции могут быть произведены из начальной функции u с помощью повторного применения операции разложения в степенной ряд – операция, которую Лагранж считал чисто алгебраической. Функции $u', u'', u''', \ldots$ Лагранж назвал производными от начальной функции u. Обозначения $\varphi'_x = \frac{d\varphi x}{dx}$, $\varphi''_x = \frac{d\varphi' x}{dx}$ и т.д., без скобок, он применил ещё раньше (1760–1761). То, что производную функции можно получить разложением последней в степенной ряд, писал ещё Эйлер в 1755 году. Лагранж положил эту идею в самое основание анализа. Развёрнутое построение системы анализа на этой основе Лагранж дал в своих трудах «Теория аналитических функций» (1797) и «Лекции по исчислению функций» (1801). Важность этих трудов заключалась не в содержавшейся в них математике, а в том, что они дали толчок О. Коши и другим ученым к строгому построению анализа.

Последнее научное усилие Лагранжа было связано с переработкой и расширением «Аналитической механики» для второго издания. Прежние силы вернулись к нему, хотя ему было уже за 70. Вспомнив свои прежние привычки, Лагранж работал непрестанно, но тело его не подчинялось больше его разуму.

Скончался Лагранж рано утром 10 апреля 1813 года. Его последними осмысленными словами были: «Я хочу умереть, да, я хочу умереть и нахожу в этом удовольствие…Я сделал свое дело, я добился некоторой известности в математике. Я никогда никого не ненавидел, я не делал ничего плохого…».

5. Математическое творчество П. Лапласа. Пьер Симон Лаплас (1749–1827) – французский математик. О ранних годах жизни Лапласа из-

вестно очень мало. Неясность, окутывающая его детство и юность, создана самим Лапласом, который очень стеснялся своих скромных родителей и при своем непреоборимом снобизме делал все, что было в его силах, чтобы скрыть свое крестьянское происхождение. Лапласу повезло благодаря дружескому интересу, проявленному к нему со стороны его состоятельных соседей, появившемуся, вероятно, в связи с его незаурядными способностями, обнаруженными в сельской школе. Затем он учился экстерном и впоследствии некоторое время преподавал математику в Военной академии в Бомоне. В возрасте 18 лет Лаплас направился в Париж, где добился встречи с Ж. Даламбером, благодаря содействию которого был назначен преподавателем математики Военной школы в Париже. После этого Лаплас погрузился в дело своей жизни: детальное применение ньютоновского закона всемирного тяготения к Солнечной системе в целом. Сложность и трудность проблемы, за решение которой взялся Лаплас, невозможно объяснить тому, кто не сталкивался с задачами подобного масштаба. Ему предстояло построить математическую модель солнечной системы, позволявшую вычислять все составные эффекты возмущений всех членов Солнечной системы друг от друга и от Солнца. Являются ли эффекты этих возмущений накапливающимися и рассеивающимися или же периодическими и сохраняющимися? Эти и подобные загадки были лишь деталями великой проблемы: устойчива или неустойчива Солнечная система?

Первый важный шаг Лапласа к решению общей проблемы был сделан в 1773 г., когда ему было 24 года. Он показал, что средние расстояния планет от Солнца являются неизменными, если не считать небольших периодических изменений. После такого блестящего начала Лаплас был избран адъюнктом Парижской академии наук. Следуя по избранному пути, Лаплас доказал, что закон всемирного тяготения полностью объясняет движение планет, если представить их взаимные возмущения в виде рядов. Он установил также, что эти возмущения носят периодический характер. В 1780 г. Лаплас предложил новый способ вычисления орбит небесных тел. Дальнейшие исследования Лапласа доказали устойчивость Солнечной системы в течение очень длительного времени. Далее Лаплас пришел к выводу, что кольцо Сатурна не может быть сплошным, т.к. в этом случае оно было бы неустойчивым, и предсказал открытие сильного сжатия Сатурна у полюсов. Одной из главных заслуг Лапласа было открытие причины ускорения в движении Луны. В 1787 г. он показал, что средняя скорость движения Луны зависит от эксцентриситета земной орбиты, который меняется под действием притяжения планет. Лаплас показал, что это возмущение не вековое, а долгопериодическое и что впоследствии Луна станет двигаться замедленно. По неравенствам в движении Луны Лаплас определил величину сжатия Земли у полюсов. В 1789 г. он рассмотрел теорию движения спутников Юпитера под действи-

ем взаимных возмущений и притяжения к Солнцу. Он получил полное согласие теории с наблюдениями и установил ряд законов этих движений. Ему принадлежит также разработка динамической теории приливов.

Результаты всех своих исследований в области небесной механики Лаплас подытожил в классическом пятитомном сочинении «Трактат о небесной механике», который публиковался частями в течение 26 лет. Первых два тома появились в 1799 г. и касались движения планет, их формы (как вращающихся тел), приливов и отливов. Два следующих тома, вышедших в 1802 и 1805 гг., продолжали исследование, которое было, наконец, завершено в 1823–1825 гг. пятым томом. Математическое изложение было иногда крайне сжатым, а иногда громоздким. Лапласа интересовали результаты, а не то, как он их получил. Избегая сложных математических рассуждений, он часто опускал все, кроме заключения с оптимистическим замечанием: «как легко видеть»… Он сам часто мог восстановить рассуждение, с помощью которого «видел» эти легкие вещи лишь после нескольких часов, а иногда и дней тяжелого труда. Даже очень сильные в математике читатели скоро приобретали привычку вздыхать во всяком месте, где появлялась знаменитая фраза, зная, что «увидеть» что-то здесь можно только после недели отчаянной работы.

Этому грандиозному произведению, в котором Лаплас развил методы небесной механики и завершил почти все то, что не удалось его предшественникам в объяснении движения тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения Ньютона, предшествовало двухтомное сочинение Лапласа «Изложение системы мира» (1796). Специальное приложение к этому сочинению содержало гипотезу о происхождении солнечной системы из туманности, предложенную до того Эммануилом Кантом в 1755 г. и даже раньше Канта Сведенборгом в 1734 г. Космогоническая гипотеза Лапласа имела огромное философское значение.

В 1785 году Лаплас был избран действительным членом Парижской академии наук, а в 1816 – членом Французской академии наук. Характеризуя научную деятельность П. Лапласа, Ж. Фурье писал: «Лаплас придавал всем своим работам постоянное направление, от которого никогда не отклонялся; неизменность взглядов была всегда основной чертой его гения». Эта особенность научной деятельности Лапласа сказалась и на его математическом творчестве. Что бы Лаплас ни делал в математике, все было предназначено в помощь решению основной проблемы – математическому моделированию Солнечной системы. Случалось, он подвергался искушению отвлечься, но ненадолго. Однажды его сильно привлекла одна из задач теории чисел, но он быстро оставил ее, поняв, что занятие ею потребует от него слишком много времени. Естественно, что вся его огромная работа в области Небесной механики требовала развитого математического аппарата и, прежде всего, мате-

матического анализа. Все его открытия в этой области в значительной мере определялись задачами небесной механики и обслуживали ее нужды. Фундаментальными являются работы Лапласа по дифференциальным уравнениям, в частности, по исследованию так называемого уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2} = 0,$$

полученного Л. Эйлером в 1752 г. при выводе некоторых основных уравнений гидродинамики и детально исследованного П. Лапласом в разделе «Трактат о небесной механике», посвященном теории гравитационного потенциала. Введенное им и Ж. Лагранжем понятие потенциала было вдохновляющей математической идеей высшего класса – оно позволило решать физические проблемы, к которым другим путем невозможно было бы подступиться. Дальнейшее развитие теория потенциала получила в работах Дж. Грина и К. Гаусса. Из этой теории выросла мощная область математики граничных задач, сегодня значительно более важная для физической науки, чем вся ньютоновская теория тяготения. Большую роль при решении уравнений с частными производными играет разработанный Лапласом метод «каскадов». Разнообразное применение имеют и введенные им сферические функции. В алгебре Лапласу принадлежит важная теорема о представлении определителей суммой произведений дополнительных миноров (теорема Лапласа).

Особую роль в его исследованиях играла теория вероятностей, хотя на первый взгляд она и уводила в сторону от главных его интересов. Но вскоре он понял, что она необходима для всех точных наук, и посчитал оправданным развивать её в пределах своих сил. По результатам работы в этой области Лапласом был написан ставший классическим труд «Аналитическая теория вероятностей», который при его жизни издавался трижды: в 1812, 1814 и 1820 гг. Трактат «Аналитическая теория вероятностей» настолько богат содержанием, что многие позднейшие открытия теории вероятностей можно обнаружить у Лапласа. В этом внушительном томе подробно рассмотрены азартные игры, геометрические вероятности, теорема Я. Бернулли и ее связь с интегралом нормального распределения, теория наименьших квадратов, изобретенная Лежандром. Руководящей мыслью является применение «производящих функций»; Лаплас показал значение этого метода для решения разностных уравнений. Здесь вводится «преобразование Лапласа», которое позже стало основой операционного исчисления Хивисайда. П. Лаплас также спас от забвенья и заново сформулировал ту теорию, набросок которой дал Томас Байес (1702–1761), малоизвестный английский священник, работы которого были опубликованы посмертно в 1763–1764 гг. Эта теория стала известна как теория вероятностей a posteriori. Теория вероятностей явилась ос-

новой для изучения всевозможных статистических закономерностей, в особенности в области естествознания.

В качестве введения к последним изданиям «Аналитической теории вероятностей» была помещена работа «Опыт философии теории вероятностей» (1814), в которой в популярной форме разъясняются основные положения и значение теории вероятностей. Согласно Лапласу, вопросы, касающиеся вероятностей, возникают потому, что люди частично осведомлены, частично нет. Это привело Лапласа к его знаменитому утверждению, в котором воплощено то, как восемнадцатое столетие понимало механистический материализм: «Ум, который знал бы все действующие в данный момент силы природы, а также относительное положение всех составляющих ее частиц и который был бы достаточно обширен, чтобы все эти данные подвергнуть математическому анализу, смог бы охватить единой формулой движение как величайших тел вселенной, так и её легчайших атомов; для него не было бы ничего неопределенного, он одинаково ясно видел бы и будущее, и прошлое. То совершенство, какое человеческий разум был в состоянии придать астрономии, дает лишь слабое представление о таком уме».

Научное наследие Лапласа включает и исследования в области экспериментальной и теоретической физики. Вместе с А. Лавуазье в 1779–84 гг. Лаплас занимался физикой, в частности, вопросом о скрытой теплоте плавления тел и работами с созданным ими ледяным калориметром. Для измерения линейного расширения тел они впервые применили зрительную трубу; изучали горение водорода в кислороде. Лаплас активно выступал против ошибочной гипотезы о флогистоне. Позднее снова вернулся к физике и математике Он опубликовал ряд работ по теории капиллярности и установил закон, носящий его имя. В 1809 г. Лаплас занялся вопросами акустики; вывел формулу для скорости распространения звука в воздухе. Лапласу принадлежит барометрическая формула для вычисления изменения плотности воздуха с высотой над поверхностью Земли, учитывающая влияние влажности воздуха и изменение ускорения свободного падения. Занимался также геодезией.

По философским взглядам Лаплас примыкал к французским материалистам. Так, например, на вопрос Наполеона I, почему в его «Небесной механике» нет упоминаний о Боге, Лаплас ответил, что не нуждался в такой гипотезе. Однако материализм Лапласа был механистическим, что проявилось в попытке объяснить весь мир, в том числе физиологические, психические и социальные явления, с точки зрения механистического детерминизма. Свое понимание детерминизма Лаплас рассматривал как методологический принцип построения всякой науки. Образец окончательной формы научного познания Лаплас видел в небесной механике. Лапласовский детерминизм стал

нарицательным обозначением механистической методологии классической физики.

Материалистическое мировоззрение Лапласа, ярко сказавшееся в научных трудах, контрастирует с его политической неустойчивостью. При всяком политическом перевороте Лаплас переходил на сторону победивших; сначала был республиканцем, после прихода к власти Наполеона – министром внутренних дел; членом и вице-председателем сената, получил титул графа империи, а в 1814 г. подал свой голос за низложение Наполеона; после реставрации Бурбонов получил пэрство и титул маркиза.

6. Математическое творчество и общественная деятельность Г. Монжа. Гаспар Монж (1746–1818) – французский математик и общественный деятель, член Парижской АН (1780) – родился в Боне в семье розничного торговца и точильщика, который питал исключительное уважение к образованию и послал своих трех сыновей учиться в местный колледж. Научная карьера Гаспара началась в военной академии в Мезьере (1768–1789), где на лекциях по фортификации он, исходя из идеи проектирования предметов на две взаимно перпендикулярные плоскости, создал общий метод изображения пространственных фигур на плоскости. Разработанный им метод оказался столь эффективным в военной инженерии, что был объявлен секретным, а его публикация запрещена на многие годы. Опубликовать свои обширные исследования Монжу удалось только в 1799 г. в книге «Начертательная геометрия». В созданной им теории содержался зародыш проективной геометрии, а его мастерство в применении алгебраических и аналитических методов в теории кривых и поверхностей во многом содействовало развитию аналитической и дифференциальной геометрии. В Мезьере Монж начал также применять анализ к исследованию пространственных кривых и поверхностей. Эти его работы позже были опубликованы в «Приложении анализа к геометрии» (1795). В ней Монж дал обстоятельное изложение дифференциальной геометрии пространственных кривых и поверхностей: изучил эволюты пространственных кривых, кривизны поверхностей, исследовал огибающие, развёртывающиеся поверхности, рассмотрел общие свойства нормальных конгруэнций и ввёл линии кривизны поверхностей. В этом труде Монжа, помимо важных открытий по дифференциальной геометрии, дано геометрическое истолкование уравнений с частными производными и, с другой стороны, изложение геометрических фактов на языке уравнений с частными производными. Монжу принадлежат также работы по математическому анализу, химии, оптике, метеорологии и практической механике.

В период Великой французской революции Монж состоял в комиссии по установлению системы мер и весов, в 1792–93 гг. был морским министром. В 1793 году заведовал пороховыми пушечными заводами республики. Активно участвовал в создании Высшей нормальной школы (1794), Поли-

технической школы (1794) в Париже. В период Директории Монж сблизился с генералом Бонапартом, участвовал в его египетской экспедиции (1798–1801). Вернулся во Францию вместе с Бонапартом; возобновил преподавание в Политехнической школе. Во времена Первой империи Монж стал сенатором, получил титул графа. В 1815 г., когда вернулись Бурбоны, Монж был лишён (1816) всех прав и изгнан из Политехнической школы и Академии наук и вскоре после этого умер.

В отличие от Ж. Лагранжа, который по стилю мышления был аннализтом, Г. Монж был прирожденным геометром. Это сказалось даже в его подходе к уравнениям в частных производных, который носит отчетливо выраженный геометрический характер. Именно ему Политехническая школа обязана процветанию в начале XIX века в её стенах новых геометрических идей.

7. Математическое творчество А. Лежандра. Адриен Мари Лежандр (1752–1833) – французский математик. Обосновал и развил теорию геодезических измерений и первым открыл (1805–1806) и применил в вычислениях метод наименьших квадратов. В области математического анализа им введены т.н. многочлены Лежандра, преобразования Лежандра и исследованы эйлеровы интегралы. Большую работу провел Лежандр по систематизации и обоснованию теории эллиптических интегралов (1825–1828), т.е. интегралов вида $\int R(x,w)dx$, где $R(x,w)$ – рациональная функция x и $w=\sqrt{P(x)}$, а $P(x)$ – многочлен третьей или четвертой степени без кратных корней. Свое название эллиптические интегралы получили в связи с тем, что через один из таких интегралов выражается длина дуги эллипса. Эллиптические интегралы встречались в задачах об определении длин дуг различных кривых еще у Дж. Валлиса, Я. Бернулли и др. математиков XVII века. Дж. Фаньяно (1716–1750) указал условия, при которых сумма или разность дуг выражается в конечном виде. Все эти результаты оказались частными случаями теоремы сложения эллиптических интегралов, открытой Эйлером (1761 и последующие годы). Работая в этой области, Лежандр доказал приводимость эллиптических интегралов к каноническим формам (нормальная форма Лежандра), нашел их разложения в ряды, составил таблицы их значений. Проблемы обращения эллиптических интегралов, т.е. перехода от функции $u=\int_0^z R(x,w)dx$ к функции $z=z(u)$, которые впоследствии были названы эллиптическими, прошла мимо внимания Лежандра. Первым, кто заинтересовался этой проблемой, был К. Гаусс, получивший многие результаты теории эллиптических функций еще в конце 18 в. (1797 и последующие годы), но не опубликовавший их. Фактически основателями эллиптических функций являются Н. Абель и К. Якоби.

Лежандру принадлежит также первое последовательное и полное изложение современной ему теории чисел. В вариационном исчислении он установил признак существования экстремума. Написал известный учебник по геометрии (1794) и в некоторых его изданиях безуспешно пытался доказать постулат о параллельных.

8. Математическое творчество Ж. Фурье. Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) – французский математик. Окончил военную школу в Осере, работал там же преподавателем. В 1796–1798 гг. преподавал в Политехнической школе в Париже. В 1798 году вместе с другими учёными принимал участие в Египетской экспедиции Наполеона Бонапарта. С 1802 по 1815 гг. Фурье был префектом департамента Изер, в 1817 году переехал в Париж. В том же году был избран членом Парижской АН.

Первые труды Фурье относятся к алгебре. Уже в лекциях 1796 года он изложил теорему о числе действительных корней алгебраического уравнения, лежащих между данными границами (опубликовал в 1820). В 1818 году Фурье исследовал вопрос об условиях применимости разработанного Ньютоном метода численного решения алгебраических уравнений. Итогом работ Фурье по численным методам решения уравнений является «Анализ определённых уравнений». Основной областью занятий Фурье была математическая физика. В 1807 и 1811 годах он представил Парижской АН свои первые открытия по теории распространения тепла в твёрдом теле, а в 1822 году опубликовал известную работу «Аналитическая теория тепла», сыгравшую большую роль в последующем развитии математики. В ней Фурье вывел дифференциальное уравнение теплопроводности и далеко развил идеи, в самых общих чертах намеченные ранее Д. Бернулли. Для решения уравнения теплопроводности при тех или иных заданных граничных условиях Фурье разработал метод разделения переменных (метод Фурье), который он применял к ряду частных случаев. В основе этого метода было применение тригонометрических рядов, что уже было предметом дискуссии между Эйлером, Даламбером и Д. Бернулли. Несмотря на все то, что было указано Эйлером и Д. Бернулли, эта идея была настолько нова и ошеломляюща во времена Фурье, что, согласно преданию, когда он впервые в 1807 г. высказал свои соображения, он встретил энергичную оппозицию со стороны не кого иного, как Лагранжа.

Ряды Фурье теперь стали хорошо разработанным средством в теории уравнений в частных производных при решении граничных задач. Исследование этих рядов, проведенное Фурье, отчетливо поставило вопрос о том, что следует понимать под функцией. Это было одной из причин того, что математики девятнадцатого столетия сочли необходимым более тщательно рассмотреть вопросы о строгости математических доказательств и об общих основах математических понятий. За эту задачу, в частном случае рядов Фурье, взялись Дирихле и Риман. С этими исследованиями было связано возникновение теории множеств и теории функций действительного переменного.

9. «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых» Л. Карно. Исследования по основаниям анализа предвещали его близкую реформу, произведённую в первой половине XIX века. Неким обобщением этих

усилий явилась работа известного французского математика Лазара Карно (1753–1823) «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых» (1796). Работа была выполнена в соответствии с требованиями конкурса, объявленного в 1786 году Берлинской академией наук. По условию этого конкурса, требовалось показать, «каким образом из противоречивых посылок получаются столь многочисленные истинные положения, и предложить вместо понятия бесконечности другое отчетливое и достоверное понятие, однако такое, чтобы вычисления не стали затруднительными или долгими».

В этой работе Карно сопоставляет различные способы обоснования анализа – метод исчерпывания, метод неделимых, метод пределов и в результате приходит к выводу, что все эти «методы являются, собственно говоря, только одним и тем же методом, рассматриваемым с различных точек зрения. Это все тот же метод исчерпывания древних, более или менее упрощенный, более или менее удачно приспособленный к нуждам исчисления и, наконец, приведенный к регулярному, упорядоченному алгоритму».

Поскольку все концепции анализа для Карно с принципиальной стороны одинаковы, постольку вопрос о концепции, наиболее пригодной для использования, стоит для него лишь в чисто утилитарной плоскости. Пальма первенства отдаётся творению Лейбница, хотя Карно совсем не намерен отбросить, как ненужные, другие приёмы анализа. Каждый из них может оказаться пригодным в том или ином случае, помочь при решении какой-либо задачи, облегчить и упростить доказательство, но для общего и обычного употребления Лейбницев анализ, с его символикой и видоизменёнными, уточнёнными определениями некоторых понятий, предпочтительнее. Об этом, по мнению Карно, красноречиво говорят успехи математики, достигнутые продолжателями Лейбница. В пользу его, считает Карно, свидетельствует и сравнение с каждым из других методов в отдельности. Проблема решается в нём более общим образом, например, чем в методе исчезающих величин. А перед методом пределов он обладает тем преимуществом, что в первом дозволяется оперировать лишь отношениями, пределами, в силу чего он лишается тех способов комбинирования и преобразования неконечных количеств, которые как раз обеспечивают анализу его силу.

Главная черта труда Карно – в его двойственности. Зеркало конца эпохи – «Размышления» – выпукло рисует философию математики на континенте и ее колебания перед началом нового века и новой эры в истории математики. Одной стороной своей они обращены к прошлому. Девятнадцатый век пошел в другом направлении. Не побоявшись объединить идеи обеих школ, предел и алгоритм исчисления бесконечно малых, Коши и иные ученые создали то стройное здание анализа, в котором новые логические трещины появились лишь много десятилетий, чуть ли не век спустя.

Лекция 16. Математика первой половины XIX века

План лекции:

1. Общая характеристика эпохи.
2. К. Гаусс и его математическое творчество.
3. Аналитико-алгебраические исследования (Коши, Больцано, Абель, Якоби, Галуа, Дирихле).
4. Геометрия первой половины XIX века (Понселе, Штейнер, Штаудт, Мёбиус, Плюккер, Шаль).
5. Открытие неевклидовой геометрии (Лобачевский, Больяй).

1. Общая характеристика эпохи. Французская революция и наполеоновское правление, стимулировавшие промышленную революцию в континентальной Европе, создали новые общественные классы, заинтересованные в науке, побуждая к занятиям физическими науками и техническому образованию. В академическую жизнь ворвались демократические идеи, устаревшие формы мышления вызывали критику; общеобразовательные школы и университеты преобразовывались и обновлялись. В XIX веке мы уже не находим ученых при королевских дворах или аристократических салонах. Быть членами ученых академий уже не составляет их главного занятия – обычно они работают в университетах или технических школах и являются преподавателями столько же, сколько и исследователями. Бернулли, Лагранж и Лаплас преподавали от случая к случаю. Теперь же ответственность преподавателя возрастает, профессора становятся воспитателями и экзаменаторами молодежи. Латинский язык науки постепенно вытеснялся национальными языками. Упрочение связей между учеными в пределах наций вело к подрыву интернационализма предыдущих столетий, хотя международный обмен мыслями продолжался. Все это создавало исключительно благоприятные условия для дальнейшего развития математики. При этом, в отличие от математики XVII и XVIII веков, новые математические направления постепенно освобождались от прежней тенденции видеть конечную цель точных наук в механике и астрономии. Новое поколение математиков, вдохновленное расцветом других разделов физики и естествознания, в большей степени, чем их предшественники, были заинтересованы в развитии новых областей математики и уточнении ее собственной структуры и логических основ. Хотя связь с непосредственной практикой никогда не обрывалась, теперь она часто оказывалась в тени. Новый мощный импульс лишь частично шел из Франции; как часто бывало в истории цивилизации, он шел также и с периферии политических и экономических центров, в данном случае из Германии, Норвегии, России. В то же время начавшийся в начале XVIII века упадок математической

науки в Англии, вызванный затянувшимся спором о приоритете. захватил и несколько первых десятилетий XIX века.

В девятнадцатом столетии растет специализация математиков, сопровождаемая их разделением на преимущественно чистых математиков и прикладников. Математики начали работать в обособленных областях, и если Г. Лейбница, Л. Эйлера, Ж. Даламбера можно охарактеризовать как «математиков» (или, как в те годы принято было говорить, – геометров), то о О.Коши мы говорим как об аналитике, о А. Кэли – как об алгебраисте, о Я. Штейнере – как о чистом геометре, а о Г. Канторе – как об основоположнике теории множеств. Наступило время специалистов по математической физике, за которыми последовали ученые в области математической статистики или математической логики. Только самая высокая степень одаренности позволяла преодолеть порождаемую специализацией разобщенность, оказывая наиболее мощное воздействие на математиков. Из математиков XIX века к их числу принято относить, прежде всего, К. Гаусса, Б. Римана, Ф. Клейна и А. Пуанкаре

Объективно крупнейшим математическим событием первой половины XIX века явилось создание Лобачевским неевклидовой геометрии. Однако полное ее признание, со всеми вытекающими из этого последствиями, пришло только в начале семидесятых годов девятнадцатого столетия. В этот период почти что лихорадочной продуктивности в новых областях проективной и алгебраической геометрии рождение совершенно нового вида геометрии, изложенной к тому же в немногих и трудных работах, осталось большинством математиков незамеченным. Тем же, кому это открытие становилось известным, трудно было смириться с мыслью, что искусственно построенная геометрическая система, полученная заменой одного постулата другим, ему противоположным, может иметь практическое значение. К тому же такая идея противоречила общепринятой в то время идеологии И. Канта о врожденности наших представлений о пространстве. Только после работ Б. Римана и Ф. Клейна, а также после открытия поверхности, на которой реализовались куски неевклидовой геометрии, многие математики в полной мере прониклись новыми идеями и стали их плодотворно использовать в своей математической деятельности. С этого времени, открывшего новый период в развитии математики, все чаще и смелее стали использоваться искусственно построенные математические конструкции.

К числу наиболее известных математиков XVIII-го века, чье активное математическое творчество продолжалось и в XIX-м веке, можно, прежде всего, отнести П. Лапласа, Ж. Фурье и К. Гаусса. Первому из них на рубеже веков было 50 лет, второму – 36 лет и третьему всего 23 года. Несмотря на столь молодой возраст последнего, именно о Гауссе говорят как о математике, не только стоящем на рубеже эпох, но и соединяющем эти эпохи. Своей

разносторонностью интересов, равным интересом к теоретическим и прикладным проблемам, свободным владением латинским языком Гаусс может быть отнесен к математикам XVIII века, в то же время свойственные ему новый более высокий уровень строгости, поворот от проблем математического анализа к алгебраическим проблемам и высшей геометрии характеризуют его как математика XIX века.

2. К. Гаусс и его математическое творчество. Карл Фридрих Гаусс родился в 1777 г. в немецком юроде Брауншвейге в семье водопроводчика. С 1795 по 1798 гг. учился в Гёттингенском университете. В 1799 г. получил доцентуру в Брауншвейге, в 1807 г. – кафедру математики и астрономии в Гёттингенском университете, с которой была также связана должность директора Гёттингенской астрономической обсерватории. На этом посту Гаусс оставался до самой смерти в 1855 г., без тревог и забот спокойно работая в качестве директора обсерватории и профессора родного университета. Как и его современники И. Кант, В. Гете, Л. Бетховен и Г. Гегель, он стоял в стороне от больших политических битв, разыгрывавшихся в других странах, но в своей области он самым энергичным образом выразил новые идеи своего века.

Дневники К. Гаусса показывают, что уже на семнадцатом году жизни он начал делать поразительные открытия. Например, в 1795 г. он, независимо от Л. Эйлера, нашёл закон квадратичной взаимности теории чисел. Некоторые из его ранних открытий изложены в Хельмштедтской диссертации, защищенной им в 1799 г., а также в его первом крупном сочинении по теории чисел и высшей алгебре «Арифметические исследования», опубликованном в 1801 году. В частности, в упомянутой выше диссертации Гаусс дал первое строгое доказательство так называемой «основной теоремы алгебры» о числе корней алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами, восходящей к Альберу Жирару («Новое открытие в алгебре», 1629), которую в 1746 г. пытался доказать Даламбер. Гауссу нравилась эта теорема, и позже он дал еще пять доказательств, и еще одно было найдено после смерти Гаусса в его бумагах.

В «Арифметических исследованиях», во многом предопределивших дальнейшее развитие теории чисел, собраны все достижения предшественников Гаусса в области теории чисел, и вместе с тем теория чисел настолько обогащена, что опубликование этой книги часто считают началом современной теории чисел. Центральное место в книге занимает теория квадратичных форм, вычетов и сравнений второй степени; высшим достижением является закон квадратичной взаимности, «золотая теорема», первое полное доказательство которой дал Гаусс. Гаусс был увлечен этой теоремой не менее, чем основной теоремой алгебры.

В «Арифметических исследованиях» содержится также вопрос о корнях уравнения $x^n=1$, равносильный проблеме деления круга на n равных частей.

Там получена замечательная теорема, что с помощью только циркуля и линейки можно построить правильный 17-угольник (более общим образом, правильный n-угольник при $n=2^p+1$, $p=2^k$, где n – простое число, k = 0, 1, 2, 3,...) – удивительное геометрическое обобщение в греческом духе. Гаусс придавал этому открытию очень большое значение и завещал выгравировать правильный 17-угольник, вписанный в круг, на своём надгробном памятнике, что и было исполнено.

Астрономией Гаусс заинтересовался после того, как в первый день нового столетия, была открыта первая малая планета, названная Церерой. Так как при этом не удалось измерить необходимое число координат новой планеты, то возникла проблема расчета орбиты по малому числу наблюдений. Гаусс полностью решил эту проблему; разработав метод вычисления эллиптических орбит по трём наблюдениям. В 1821–23 гг. Гаусс обосновал, открытый им еще в 1795 г. основной математический метод обработки неравноценных наблюдательных данных (метод наименьших квадратов). В связи с астрономическими наблюдениями, основанными на разложении интегралов соответствующих дифференциальных уравнений в бесконечные ряды, Гаусс, при изучении гипергеометрического ряда, провел первое систематическое исследование сходимости ряда.

После 1820 года К. Гаусс начал живо интересоваться геодезией, толчком к этому послужило данное ему поручение провести геодезическую съёмку и составить детальную карту Ганноверского королевства. В результате теоретической разработки проблемы Гаусс создал основы высшей геодезии «Исследования о предметах высшей геодезии», (1842–1847). Изучение формы земной поверхности потребовало углублённого геометрического метода для исследования поверхностей. Выдвинутые Гауссом в этой области идеи получили выражение в сочинении «Общие исследования о кривых поверхностях» (1827), где подход к вопросу резко отличался от подхода Монжа. Здесь снова практические соображения, на этот раз из области высшей геодезии, тесно связаны с тонким теоретическим анализом. Руководящая мысль этого сочинения заключалась в том, что при изучении поверхности основное значение имеет ее уравнение в декартовых координатах, а дифференциальная квадратичная форма $ds^2=Edu^2+Fdudv+Gdv^2$, через которую выражается квадрат элемента длины и инвариантами которой являются все собственные свойства поверхности, – прежде всего её кривизна в каждой точке. И здесь есть кульминационная точка – теорема, которая утверждает, что полная кривизна поверхности зависит только от E, F, G и их производных и, следовательно, инвариантна при изгибании. Созданная Гауссом внутренняя геометрия поверхностей послужила образцом для создания римановой геометрии.

Даже в годы упорной работы в области геодезии Гаусс не забывал свою первую любовь – «царицу математики». В 1825 и 1831 гг. появились его ра-

боты по биквадратичным вычетам. Это было продолжением его теории квадратичных вычетов в «Арифметических исследованиях», но с использованием нового метода – теории комплексных чисел. В работе 1831 г. дана не только алгебра комплексных чисел, но и их арифметика. Здесь появляется новая теория простых чисел, в которой число 3 остается простым числом, но 5 уже не является простым числом, так как может быть разложено в произведение (1+2i)(1–2i). Эта новая теория комплексных чисел разъяснила многие неясности в арифметике, так что квадратичный закон взаимности получился здесь проще, чем для действительных чисел. В этой работе Гаусс навсегда изгнал ту таинственность, которая окружала комплексные числа, введя их представление с помощью точек плоскости.

Исследования Гаусса по теоретической физике (1830–1840) являются в значительной мере результатом тесного общения и совместной научной работы с В. Вебером. Вместе с ним Гаусс создал абсолютную систему электромагнитных единиц и сконструировал в 1833 г. первый в Германии телеграф. В 1835 г. Гаусс основал магнитную обсерваторию при Гёттингенской астрономической обсерватории. В 1838 г. он издал труд «Общая теория земного магнетизма». К теоретической физике примыкают также разработка Гауссом принципа наименьшего принуждения, работы по теории капиллярности и его «Диоптрические исследования», в которых он заложил основы теории построения изображения в системах линз.

Очень многие исследования Гаусса остались неопубликованными и в виде очерков, незаконченных работ, переписки с друзьями входят в его научное наследие. Наиболее интересны в этом наследии материалы по неевклидовой геометрии и теории эллиптических функций. Материалы, относящиеся к неевклидовой геометрии, обнаруживают, что Гаусс пришёл к мысли о возможности построения неевклидовой геометрии в 1818 г., но опасения, что эти идеи не будут поняты, их далее не разрабатывал и не публиковал. Когда вне всякого отношения к этим попыткам Гаусса неевклидова геометрия была построена и опубликована Н.И. Лобачевским, Гаусс отнёсся к публикациям Лобачевского с большим вниманием, был инициатором избрания его членом-корреспондентом гёттингенского учёного общества, но своей оценки великого открытия по существу не дал. Архивы Гаусса содержат также обильные материалы по теории эллиптических функций и своеобразную их теорию; однако заслуга самостоятельной разработки и публикации теории эллиптических функций принадлежит К. Якоби и Н. Абелю.

3. Аналитико-алгебраические исследования. К числу математиков, чья творческая деятельность полностью протекала в первой половине XIX века и по содержанию и по форме соответствовала духу нового времени, следует, прежде всего, отнести О. Коши. Б. Больцано Н. Абеля, Я. Якоби, Э. Галуа и П. Дирихле. В работах всех этих математиков преобладает рассмотре-

ние проблем математического анализа, переплетающихся с новыми идеями алгебры. Начавшаяся в конце первой половине XIX века арифметизация математического анализа будет рассмотрена в следующей лекции.

О. Коши. Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик. В 1807 г. окончил Политехническую школу, а в 1810 – Школу мостов и дорог в Париже, после окончания которой три года работал инженером в Шербуре. С 1816 по 1830 гг. преподавал в Политехнической школе и Коллеж де Франс. С 1816 г. – член Парижской АН. После революции 1830 г., будучи убежденным роялистом, О. Коши оставил свою кафедру в Политехнической школе и, проведя несколько лет в Турине и Праге, в 1838 г. вернулся в Париж. После 1848 г., получив разрешение остаться во Франции, не принося присяги новому правительству, стал преподавать в Парижском университете и в Коллеж де Франс. Его продуктивность была настолько велика, что Парижская академия должна была ограничить объем всех статей, публикуемых в ее отчетах, для того чтобы справиться с продукцией Коши.

Труды Коши относятся к различным областям математики (преимущественно к математическому анализу) и математической физики. Вместе со своими современниками – К. Гауссом, Н. Абелем и Б. Больцано – Коши принадлежит к пионерам в деле внедрения в математику повышенной строгости. Восемнадцатое столетие было в основном периодом экспериментирования, когда новые результаты сыпались в изобилии. Математики того времени не слишком заботились об обосновании своих исследований – о Даламбере, например, рассказывали, что он однажды, стимулируя собеседника, заявил: «Шагайте вперед, и вера к вам придет». Когда они все же занимались обоснованием, как иной раз Л. Эйлер и Ж. Лагранж, их аргументы не всегда были убедительными. Теперь же наступило время для точного выяснения смысла используемых понятий, фактов и методов, например, понятия функции, непрерывности, производной, интеграла, сходимости ряда, решения дифференциального уравнения и т.д. Усовершенствовав и уточнив даламберово понятие предела, Коши дал то обоснование анализа, которое сейчас является общепринятым в наших учебниках. Его «Курс анализа» (1821), «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), «Лекции по приложениям анализа к геометрии» (Т.1-2, 1826–1828), основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени. В них он дал современное определение понятия непрерывной функции, чёткое построение теории сходящихся рядов, определение интеграла как предела интегральных сумм и др. Дав современное определение предела, Коши с его помощью определяет производную функцию как предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ при $i \to 0$ и обозначает его y' или $f'(x)$. Затем он определяет «бесконечно малое переменное» как переменное число, предел

которого есть нуль, и далее вводит понятие дифференциала. Теорему о среднем значении и остаточном члене ряда Тейлора Коши вводит так, как их в свое время вывел Лагранж, однако, в отличие от последнего, исследование ряда ведет с должным учетом его сходимости. В книгах Коши вполне определенно намечается та арифметизация анализа, которая позже стала сутью исследований К. Вейерштрасса.

В интегральном исчислении Коши вернулся к лейбницевой трактовке интеграла как бесконечной суммы дифференциалов, уточнив это определение с помощью понятия предела. Определенным интегралом действительной функции действительного переменного он назвал предел интегральных сумм при стремлении к нулю максимума разностей $x_i - x_{i-1}$,. а также впервые доказал существование такого предела, а значит и соответствующего определенного интеграла для непрерывной функции. Аналогично определил он и простейшие несобственные интегралы для неограниченного промежутка интегрирования и для функций с конечным числом точек разрыва.

Коши систематически развивал основы теории аналитических функций комплексного переменного, начала которой заложил Даламбер, при решении задач гидродинамики. В руках Коши теория функций комплексного переменного превратилась из полезного для гидродинамики и аэродинамики орудия в новую и самостоятельную область математических исследований. Работы Коши в этой области, начиная с 1814 г., появлялись непрерывно. Одной из наиболее важных работ являются его «Мемуары об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами», опубликованные в 1825 г. В этой работе мы находим интегральную теорему Коши, в связи с которой вводятся вычеты. Теорема о том, что всякую регулярную функцию $f(x)$ можно разложить вблизи любой точки $z=z_0$ в ряд, сходящийся в круге, проходящем через особую точку, ближайшую к $z=z_0$, была опубликована в 1831 г., в том самом году, когда Гаусс опубликовал свою арифметическую теорию комплексных чисел. Обобщение теоремы Коши о рядах, данное Пьером Лораном, было опубликовано в 1843 г., когда его знал также и К. Вейерштрасс. Эти факты констатируют, что теории Коши не довелось встретиться с сопротивлением специалистов.

В области теории дифференциальных уравнений Коши принадлежат: постановка так называемой задачи Коши, основные теоремы существования решений и метод интегрирования уравнений с частными производными первого порядка. В работах по теории упругости он рассматривал тело как сплошную среду и оперировал напряжением и деформацией, относимой к каждой точке. В работах по оптике Коши дал математическую разработку теории Френеля и теории дисперсии. Коши принадлежат также исследования по теории чисел, алгебре, геометрии.

Б. Больцано. Бернард Больцано (1781–1848) – чешский философ, теолог и последний в ряду великих математиков-любителей. Окончил сначала философский, а затем теологический факультеты Пражского университета, по окончании последнего занял кафедру истории религии в том же университете. Однако уже в 1820 г. за вольномыслие был лишён права публичных выступлений, после чего стал работать в основном в области логики и математики. Главное логическое сочинение Больцано «Наукоучение» (1837) – обширный историко-критический обзор традиционных логических учений с оригинальным изложением логики. Много работая над логическими основами математического анализа, Больцано первым выдвинул идею арифметической теории действительного числа. В его сочинениях, опубликованных при жизни и входящих в его рукописное наследство, можно найти ряд фундаментальных понятий и теорем анализа, обычно связываемых с более поздними исследованиями других математиков. В «Парадоксах бесконечного» (изд. 1851) Больцано выступил предшественником Г. Кантора в исследовании бесконечных множеств. Отправляясь от идеи Г. Лейбница, Больцано отстаивал объективность актуально бесконечного. Свое убеждение в необходимости самостоятельного, без обычного для того времени обращения к геометрии и механике, обоснования анализа Больцано высказал в брошюре, посвящённой доказательству того, что если непрерывная (в современном смысле) на отрезке функция принимает в его концах противоположные по знаку значения, то она на этом отрезке, по крайней мере один раз, принимает нулевое значение. Полное название этого небольшого, но чрезвычайно богатого новыми идеями сочинения таково: «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит, по меньшей мере, один действительный корень уравнения».

Программная по существу брошюра Больцано не привлекла того внимания, которого заслуживала (хотя, возможно, она оказала влияние на формирование взглядов Коши), а многие другие свои замечательные открытия в теории функций действительного переменного он изложил в рукописях, прочитанных только через несколько десятилетий после его смерти. Но одновременно с Больцано к реформе анализа на тех же началах приступили Гаусс и Коши. При этом как раз Коши, который не только применял свои идеи в специальных работах, как Гаусс, но и распространял их с кафедры и в целом ряде возникших из лекций печатных курсов, особенно содействовал реформе, за которой во второй половине девятнадцатого века необходимо последовала более глубокая арифметизация анализа. Принципиальное значение имело при этом построение на рубеже 60-х и 70-х годов новых теорий действительного числа.

Н. Абель. Нильс Хенрик Абель (1802–1829) – норвежский математик. Родился в семье сельского священника, учился в Кристиании (Осло). Исклю-

чительные математические способности начал проявлять с 16 лет. Одна из первых его работ, написанная еще в 1823 г., была посвящёна интегральным уравнениям. Будучи студентом, некоторое время думал, что решил уравнение пятой степени, но вскоре сам поправил себя в брошюре, опубликованной в 1824 г. За эту работу, в которой Абель доказал невозможность решения общего уравнения пятой степени в радикалах, ему было выделено пособие (стипендия), позволившее Абелю совершить поездку в Берлин, Италию и Францию. Мучимый бедностью и чахоткой, робкий и сдержанный молодой математик завязал лишь немногие знакомства. На родине Абель не был признан при жизни, жил в нужде, умер от туберкулёза. Только через 80 лет после его смерти (в 1908) в Осло был воздвигнут посвященный ему памятник.

Несмотря на столь короткую и тяжелую жизнь, Абель успел в математике сделать очень многое. Продолжая выполненную в 1824 году работу, Абель к 1826 г. обобщил её результаты и указал частные типы уравнений, разрешимых в радикалах. В интегральном исчислении Абель в 1827 г. изучал интегралы от алгебраических функций – так называемые абелевы интегралы (1827). Затем его интересы обратились к исследованиям по эллиптическим функциям, которые велись в непродолжительном, но увлекательном соревновании с Я. Якоби. К тому времени К. Гаусс в своих личных заметках уже установил, но не опубликовал, что обращение эллиптических интегралов приводит к однозначным двоякопериодическим функциям. Лежандр, который положил столько усилий на эллиптические интегралы, полностью упустил это обстоятельство, и открытия Абеля, с которыми он познакомился уже стариком, произвели на него глубокое впечатление. Абелю повезло в том отношении, что новое периодическое издание охотно печатало его статьи: в первый том «Журнала чистой и прикладной математики», издаваемого Крелле, вошло пять статей Абеля. Во втором томе, увидевшем свет в 1827 г., появилась первая часть «Исследовании об аналитических функциях» Абеля, с чего началась теория двоякопериодических функций.

Большое значение имеют работы Абеля по обоснованию математического анализа. Он систематически подчёркивал необходимость пользоваться только сходящимися рядами. Ему принадлежит исследование области сходимости биноминального ряда для комплексных значений переменных (1826) и свойств функций, представленных степенными рядами.

Работы Абеля привели к появлению таких новых математических дисциплин, как теория Галуа и теория алгебраических функций, содействовали всеобщему признанию теории функций комплексного переменного, оставили заметный след в теории интерполирования функций, теории функциональных уравнений и теории чисел.

К. Якоби. Карл Густав Якоб Якоби (1804–1851) – немецкий математик, родился в семье известного берлинского банкира. Его брат Мориц жил в Пе-

тербурге и был одним из первых русских ученых, занимавшихся экспериментальным исследованием электрических явлений. После нескольких лет занятий в Берлине Якоби с 1826 по 1843 гг. преподавал в Кенигсберге, в том числе в должности профессора этого университета с 1829 по 1842 гг. Якоби состоял членом Лондонского королевского общества, Берлинской и Парижской академий наук. В конце сороковых Якоби некоторое время провел в Италии, пытаясь восстановить свое здоровье, и закончил свой жизненный путь профессором Берлинского университета в 1851 г. в возрасте сорока шести лет.

Это был остроумный и либеральный мыслитель, вдохновенный преподаватель и ученый огромной энергии, с большой ясностью мысли, что позволило ему затронуть почти все области математики. Якоби наряду с Абелем является одним из создателей теории эллиптических функций. Свой вариант этой теории Якоби строил на основе четырех функций, так называемых тэта-функций, определенных бесконечными рядами. Якоби дал развёрнутое изложение теории эллиптических функций, названных его именем (они были введены Н. Абелем). В 1847 г. Ж. Лиувилль опубликовал изложение основ общей теории эллиптических функций, рассматриваемых как мероморфные двоякопериодические функции; это изложение представляло пример применения к теории эллиптических функций начал теории аналитических функций комплексного переменного, развитых О. Коши.

Важные результаты получил Якоби и в области теории чисел, алгебры, вариационного исчисления, интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений. Исследуя дифференциальные уравнения динамики, Якоби указал ряд новых методов их решения и ввёл в употребление функциональные определители, указав на их роль при замене переменных в кратных интегралах и при решении уравнений с частными производными. Результаты исследований в этой области Якоби изложил в статье «О построении и свойствах определителей» (1841), которая сделала теорию определителей общим достоянием математиков. Сама идея определителя значительно старше – она восходит в основном к Лейбницу (1693), швейцарскому математику Габриэлю Крамеру (1750) и Лагранжу (1770), а название принадлежит Коши (1812). По предложению Д. Сильвестра, решившего таким образом воздать должное трудам Якоби, введенный им функциональный определитель стали называть якобианом.

Э. Галуа. Эварист Галуа (1811–1832) – французский математик, сын мэра маленького городка вблизи Парижа. Учился в лицее Луи-де-Гран, к моменту окончания которого уже занимался творческой работой по математике. Дважды пытался поступить в Политехническую школу, но принят не был. Лишь в 1830 г. Галуа удалось поступить в Высшую нормальную школу. К этому времени относится начало его активной политической деятельности в составе тайного республиканского общества «Друзья народа». В 1831 г. за

активную политическую деятельность и участие в революции 1830 года Галуа был исключен из Нормальной школы. Лишенный средств существования, он давал частные уроки, одновременно стараясь как-нибудь совместить свою страстную любовь к науке и приверженность к демократическим идеям. За публичное выступление против королевского режима дважды подвергался тюремному заключению. Почти сразу после освобождения в возрасте 21 года был убит на дуэли, по всей видимости, спровоцированной его политическими противниками.

Математическое наследие Галуа составляет несколько очень сжато написанных работ, не понятых современниками. Э. Галуа, по существу, построил всю теорию конечных полей (называемых теперь полями Галуа). В письме к другу, написанном накануне дуэли, Галуа формулирует основные теоремы об интегралах от алгебраических функций, вновь открытые значительно позже в работах Б. Римана. Основной заслугой Галуа является формулировка комплекса идей, к которым он пришёл в связи с продолжением исследований о разрешимости в радикалах алгебраических уравнений, начатых Лагранжем, Абелем и некоторыми другими математиками. Галуа нашел основные свойства группы преобразований, связанной с корнями алгебраического уравнения, и показал, что область рациональности этих корней определяется такой группой. Галуа указал на то центральное положение, которое занимают в группе инвариантные подгруппы. В теории Галуа нашли свое естественное место старые проблемы, такие, как трисекция угла, удвоение куба, решение кубических и биквадратных уравнений, равно как решение алгебраического уравнения любой степени. Как стало теперь известно, письмо Галуа не попало ни к Гауссу, ни к Якоби. Математическая общественность не знала об этом письме до того, как Ж. Лиувилль в 1846 г. напечатал бóльшую часть работ Галуа. К этому времени О. Коши уже начал печатать свои работы по теории групп (1844–1846). Лишь тогда некоторые математики заинтересовались теориями Галуа. Полное понимание значения Галуа было достигнуто лишь благодаря «Трактату о подстановках» (1870) Камилла Жордана и последовавшими за этим работам Ф. Клейна и Софуса Ли. У Галуа были новые идеи и относительно интегралов от алгебраических функций одного переменного, которые мы сейчас называем абелевыми интегралами. Таким образом, ход его мыслей близок ходу мыслей Б. Римана.

П. Дирихле. Петер Ложен Дирихле (1805–1859) – немецкий математик, с 1822 по 1827 гг. жил в Париже как частный учитель и встречался с Ж. Фурье, чью книгу он изучил. Хорошо изучил он также и «Арифметические исследования» Гаусса. Несколько лет преподавал в университете в Бреслау. С 1831 по 1855 годы – профессор Берлинского университета. В 1855 г., после смерти Гаусса, стал его преемником в Геттингене. Член Парижской и Берлинской АН, Лондонского королевского общества. Его личное знакомство

как с французскими, так и с немецкими математиками и с математикой обеих стран позволило ему стать истолкователем Гаусса и вместе с тем подвергнуть глубокому анализу ряды Фурье. Основные его труды – по теории чисел и математическому анализу. Его прекрасные «Лекции по теории чисел» (опубликованы в 1863) являются одним из лучших введений в исследования Гаусса по теории чисел. Они содержат также много новых результатов. В работе 1840 г. Дирихле показал, как использовать всю мощь теории аналитических функций в задачах теории чисел, и в этих исследованиях он ввел «ряды Дирихле». Ему принадлежит также обобщение понятия квадратичной иррациональности на общие алгебраические области рациональности. В этой работе Дирихле, в частности, доказал теорему о существовании бесконечно большого числа простых чисел во всякой арифметической прогрессии из целых чисел, первый член и разность которой – числа взаимно простые.

В области математического анализа Дирихле впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, установил признак сходимости ряда, дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье функции, имеющей конечное число максимумов и минимумов. Дирихле дал первое строгое доказательство сходимости рядов Фурье и этим содействовал уточнению понятия функции. В вариационное исчисление Дирихле ввел принцип, утверждающий существование функции *v,* обращающей в минимум интеграл $\int\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)dxdydz$ при заданных граничных условиях. Это было видоизменением принципа, введенного Гауссом в его теории потенциала (1839–1840), а позже у Б. Римана это оказалось мощным орудием при решении задач теории потенциала. Значительные работы Дирихле посвящены механике и математической физике.

4. Геометрия первой половины XIX века. Одновременно с замечательным развитием алгебры и анализа в первой половине XIX века происходил столь же впечатляющий расцвет геометрии. Его истоки восходят к преподавательской деятельности Монжа, в которой мы находим корни как «синтетического», так и «алгебраического» метода геометрии. Они нашли свое продолжение в работе его учеников, первыми из которых по времени были Жан Ашетт (1769–1834) и Жан Баптист Био (1774–1802), развивавшие аналитическую геометрию конических сечений и поверхностей второго порядка. В работе Био «Опыт аналитической геометрии» (1802) мы, наконец, можем распознать наш современный учебник аналитической геометрии. Ученик Монжа Шарль Дюпен (1784–1873), во времена Наполеона молодой инженер-кораблестроитель, применял методы своего учителя в теории поверхностей, где он нашел асимптотические и сопряженные линии. Дюпен стал профессором геометрии в Париже. За свою долгую жизнь он достиг видного положения и в области политики, и в области промышленности. «Индикатриса

Дюпена» и «Циклоиды Дюпена» напоминают нам о его ранних интересах. В его книгах «Развитие геометрии» (1813) и «Применения геометрии» (1825) много интересных соображений. Самым своеобразным учеником Монжа был Виктор Понселе, которого в учении Монжа привлекала, прежде всего, чисто синтетическая сторона геометрии, что привело его к той системе представлений, которую на два столетия раньше создавал Дезарг. Проективная геометрия как отдельная дисциплина начинается книгой Понселе «Трактат о проективных свойствах фигур» и работами соперничавшего с ним Жергонна.

Дальнейшее развитие идеи Понселе получили у Я. Штейнера, К. Штаудта, А. Мебиуса, Ю. Плюккера, М. Шаля и других геометров.

Ж. Понселе. Жан Виктор Понселе (1788–1867) – французский математик и инженер. В 1807 г. окончил Политехническую школу в Париже. В 1812 г. участвовал в походе Наполеона в Россию, был взят в плен, который отбывал в Саратове. В 1814 г. вернулся во Францию. Находясь в плену, написал свой основной труд по геометрии – «Трактат о проективных свойствах фигур». По возвращении на родину и после публикации «Трактата» Понселе был избран членом Парижской АН (1834). С 1838 по 1848 годы – профессор Парижского университета, с 1848 по 1850 гг. – директор Политехнической школы. В «Трактате о проективных свойствах фигур» впервые были выделены в особую группу проективные свойства фигур и созданы новые геометрические методы их исследования, дальнейшее развитие которых привело к разработке проективной геометрии. Этот объемистый том содержит все существенные понятия, относящиеся к этой новой ветви геометрии: гармоническое отношение, перспективность, проективность, инволюция и даже циклические точки на бесконечности. Хотя эта книга была лишь первым полным трактатом по проективной геометрии, эта дисциплина в течение ближайших десятилетий достигла той степени совершенства, которая делает ее классическим примером законченной математической конструкции.

Кроме проективной геометрии, Понселе принадлежат работы по технической механике и гидравлике; он усовершенствовал водяное колесо (колесо Понселе), ввёл в употребление килограммометр в качестве единицы механической работы и др.

Я. Штейнер. Якоб Штейнер (1796–1863) – швейцарский математик. Из крестьянской семьи, «пастушок», который увлекся геометрией, когда познакомился с идеями Песталоцци. Он решил учиться в Гейдельберге, потом преподавал в Берлине, где с 1834 г. до своей смерти возглавлял университетскую кафедру. С 1834 г. – член Берлинской АН. Штейнер был исключительно геометром, он настолько не терпел применения алгебры и анализа, что отвергал даже рисунки. По его мнению, лучше всего изучать геометрию, напряженно размышляя. Он говорил, что вычисление заменяет мышление, тогда как геометрия стимулирует его. Это, несомненно, было верно для самого

Штейнера, методы которого обогатили геометрию большим количеством прекрасных и часто скрытых теорем. Математика обязана ему открытием поверхности Штейнера с двойной бесконечностью конических сечений на ней (её называют также римской поверхностью). Он часто опускал доказательства своих теорем, что делает собрание сочинений Штейнера складом сокровищ для геометров, ищущих нестандартные задачи для решения. Основные труды – по проективной геометрии, в которых Штейнер уточнил и систематизировал идею проективного образования сложных геометрических образов из более простых. Штейнер строил свою проективную геометрию строго систематически, переходя от перспективности к проективности, а затем к коническим сечениям. Он решил также ряд изопериметрических задач типичными для него геометрическими приемами. Его доказательство того, что круг – это фигура наибольшей площади из всех фигур, ограниченных замкнутыми кривыми заданного периметра (1863), основано на преобразовании каждой фигуры заданного периметра, которая не является кругом, в другую фигуру того же периметра, но большей площади. Но вывод Штейнера, что в силу этого круг соответствует максимуму, содержит одно упущение: он не доказал, что максимум действительно существует. Дирихле пытался указать на это Штейнеру, строгое же доказательство было позже дано Е. Вейерштрассом.

К. Штаудт. Карл Георг Кристиан Штаудт (1798–1867) – немецкий математик. С 1835 г. – профессор университета в Эрлангене. Основные труды – по проективной геометрии. Пытаясь устранить основной недостаток системы Штейнера, заключавшейся в отсутствии метрики, необходимой для определения сложного отношения четырех точек или прямых, Штаудт в своей «Геометрии положения» ввел понятие «вурфа» четырех точек на прямой линии чисто проективным путем, а затем показал, что вурф совпадает со сложным отношением. В 1857 г. Штаудт показал, что мнимые элементы можно строго ввести в геометрию как двойные элементы эллиптических инволюций.

А. Мёбиус. Август Фердинанд Мёбиус (1790–1868) – немецкий математик, с 1816 г. – профессор Лейпцигского университета, в течение более чем пятидесяти лет наблюдатель, а потом директор Лейпцигской астрономической обсерватории, разносторонний ученый. Основные труды – по проективной геометрии. В книге «Барицентрическое исчисление» он первым ввёл однородные координаты. Поместив в вершинах фиксированного треугольника массы m_1, m_2, m_3, Мебиус приписал центру тяжести (барицентру) этих масс координаты $m_1 : m_2 : m_3$ и показал, что такие координаты удобны для описания проективных и аффинных свойств на плоскости. Введя в проективную геометрию систему координат и аналитические методы исследования, получил новую классификацию кривых и поверхностей, установил общее понятие проективного образования, исследовал корреляционные преобразования. С

этого времени однородные координаты стали общепринятым средством при алгебраической трактовке проективной геометрии. Работая в спокойном уединении, подобно своему современнику Штаудту, Мебиус сделал много других интересных открытий. Одним из примеров может быть нулевая система теории прямолинейных конгруэнций, которую он ввел в своем руководстве по статике (1837). В 1858 г. установил существование односторонних поверхностей (так называемый Лист Мёбиуса), что позволяет считать его одним из основателей нашей современной топологии.

Ю. Плюккер. Юлиус Плюккер (1801–1868) – немецкий математик и физик, профессор Боннского университета (1828–1834 и с 1836) – был как геометром, так и физиком-экспериментатором. Ему принадлежит ряд открытий в области магнетизма кристаллов, электропроводности газов и спектроскопии. В ряде статей и книг, особенно в «Новой геометрии пространства» (1868–1869), он перестроил аналитическую геометрию, внеся в нее множество новых идей. Плюккер показал силу сокращенных обозначений, в которых, например, уравнение $C_1+\lambda C_2=0$ представляет связку конических сечений. В упомянутой книге он вводит однородные координаты уже как проективные координаты, исходя из основного тетраэдра. Он вводит здесь также то фундаментальное положение, что основным элементом в геометрии могут быть не только точки. Геометрия может основываться и на таких элементах, как прямые, плоскости, окружности, сферы. Эти плодотворные представления позволили по-новому осветить как синтетическую, так и алгебраическую геометрию и прийти к новым видам двойственности. Число измерений в геометрии того или другого вида теперь уже могло быть любым положительным целым числом, в зависимости от числа параметров, необходимых для того, чтобы определить «элемент». Плюккер опубликовал также общую теорию алгебраических кривых на плоскости.

М. Шаль. Мишель Шаль (1793–1880) – французский математик и историк математики. Был студентом Политехнической школы в последние дни деятельности Монжа, а в 1841 г. стал профессором этого учреждения. В 1846 г. занял кафедру высшей геометрии в Сорбонне, специально для него учрежденную, и здесь он преподавал многие годы. С 1851 года – член Парижской АН. Труды Шаля имеют много общего с работами Плюккера, – в частности в том, с каким искусством он из своих уравнений извлекает максимум геометрических сведений. Идя по этому пути, он искусно пользовался изотропными прямыми и циклическими точками на бесконечности. Шаль был последователем Понселе в использовании «исчислительных методов», которые в его руках развились в новую область геометрии, так называемую исчислительную геометрию.

Шаль был тонким ценителем истории математики, особенно истории геометрии. Его хорошо известный «Исторический обзор происхождения и

развития геометрических методов» (1837, русский перевод 1883) стоит у порога современной истории математики. Это – хорошо написанное изложение греческой и современной геометрии и хороший пример истории математики, написанной творческим деятелем науки.

5. Создание неевклидовой геометрии. Создание неевклидовой геометрии логически связано с попытками доказать пятый постулат Евклида (постулат о параллельных линиях). Вопрос о том, является ли этот постулат независимой аксиомой или может быть выведен из других аксиом, занимал математиков в течение двух тысяч лет. Первым, кому удалось не только доказать независимость пятого постулата, но и построить новую неевклидову геометрию, полученную заменой пятого постулата противоположной ему аксиомой, был гениальный русский математик Н.И. Лобачевский, доложивший о своем открытии в 1826 г. и опубликовавший свои результаты в 1829–30 гг.

Работа Лобачевского долгое время не была замечена математической общественностью. И дело здесь не только в том, что она была написана по-русски, причем автором, мало известным европейским математикам. Дело было, прежде всего, в необычности выдвинутых идей. Даже соотечественники, и прежде всего академики Остроградский и Буняковский, математики европейского уровня, не поняли смысла результатов, полученных Лобачевским. Публично, при жизни Лобачевского, его бессмертное открытие оценил лишь только казанский профессор П.И. Котельников.

Даже более позднее немецкое издание под названием «Геометрические исследования по теории параллельных линий» не обратило па себя внимания, хотя, как известно, им заинтересовался Гаусс. Не изменила отношения к неевклидовой геометрии и публикация в 1932 г. венгерским математиком Яношем Больяй статьи «Аппендикс», в которой, хотя и в менее развитой форме, излагались основные идеи неевклидовой геометрии.

В архиве К. Гаусса после его смерти были найдены отдельные, относящиеся к 1818 г. наброски начальных положений неевклидовой геометрии. Однако Гаусс не только не опубликовал своих взглядов, но и, более того, категорически запрещал публиковать их тем, кого посвящал в них. Однако, не высказываясь в печати, Гаусс высоко оценил труды Лобачевского, и по его рекомендации последний был избран в 1842 г. чл.-корр. гёттингенского учёного общества. Некоторые историки полагают, что публичная поддержка Гаусса в те годы не изменила бы отношения к неевклидовой геометрии, ибо и он не знал, где реализуется и реализуется ли вообще где-нибудь неевклидова геометрия, а также где и как ее можно использовать. В результате неевклидова геометрия (это название принадлежит Гауссу) в течение нескольких десятилетий оставалась невостребованной областью науки. Первым ведущим ученым, кто целиком понял её значение, был Б. Риман; его общая теория многообразий (1854) допускала существовавшие не только геометрии Лоба-

чевского, но и многих других, так называемых римановых геометрий. Однако полное признание геометрия Лобачевского получила только после того как в 1868 г. итальянский математик Е. Бельтрами в своих мемуарах «Опыт толкования неевклидовой геометрии» показал, что кусок плоскости Лобачевского может быть реализован на псевдосферической поверхности. В последующие годы были установлены глубокие связи неевклидовой геометрии со многими разделами математики, а также с теоретической физикой.

Н. И. Лобачевский. Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) – русский математик, создатель неевклидовой геометрии. Родился в семье бедного чиновника. Почти всю свою жизнь провёл в Казани. Там он учился в гимназии, затем в Казанском университете. По окончании университета в 1811 г. был оставлен при нём сначала магистром, затем в 1814 году адъюнктом, в 1816 – экстраординарным и, наконец, в 1822 г. – ординарным профессором. Был также деканом физико-математического факультета, а с 1827 г. по 1846 гг. ректором университета. В последние 10 лет своей жизни Лобачевский – помощник попечителя Казанского учебного округа. Деятельность Лобачевского положила начало процветанию и славе Казанского университета. Как и Эйлер, Лобачевский под конец жизни почти ослеп, но не прекращал своей плодотворной научной деятельности. Последний свой труд по неевклидовой геометрии – «Пангеометрию» – он кончил диктовать в 1855 г.

Днем рождения неевклидовой геометрии принято считать 11(23) февраля 1826 г., когда в Казанском университете на заседании Отделения физико-математических наук Н.И. Лобачевский сообщил о своём сочинении «Сжатое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Однако опубликовано это сочинение не было из-за отрицательного отзыва, данного на него специально созданной комиссией. Хотя это сочинение Лобачевского до нас и не дошло, имеется возможность довольно точно воспроизвести его содержание. В 1829–30 гг. Лобачевский всё же опубликовал в журнале «Казанский вестник», который рассматривался как орган университета, мемуары, носившие название «О началах геометрии». Примерно первая треть этой работы, как указывает сам Н.И. Лобачевский, извлечена им из доклада 1826 г. Мемуары содержат изложение начал созданной Лобачевским неевклидовой геометрии и даёт уравнения, которые в этой геометрии связывают стороны и углы прямоугольного треугольника. Из этих уравнений, как Лобачевский показал в последующих сочинениях, систематически развёртывается как аналитическая, так и дифференциальная геометрия созданной им системы. В сочинении 1826 г., как и в других своих работах по неевклидовой геометрии, Лобачевский исходил из допущения, что через точку C, лежащую вне прямой AB плоскости ABC, проходит несколько прямых, не встречающих AB. Так как это допущение противоречит пятому постулату, то оно должно было бы привести к противоречию с теоремами абсолютной

геометрии, и это было бы равносильно доказательству постулата. Между тем, развивая выводы из сделанного им допущения и предложений абсолютной геометрии, Лобачевский ни к какому противоречию не пришёл; напротив, тонкие рассуждения привели его к стройной и последовательной системе предложений. На первый взгляд они представлялись даже абсурдными, расходящимися с обычными наглядными представлениями, но логически составляли непротиворечивую геометрическую систему, отличную от евклидовой геометрии. В результате Лобачевский пришёл к выводу, что теоретически вполне допустима геометрическая система, которую он назвал «воображаемой геометрией», отличной от евклидовой геометрии.

Саму возможность соответствия построенной им геометрии отношениям, существующим в реальном мире, Лобачевский стремился подтвердить опытной проверкой. По мнению Лобачевского, в основаниях математических наук должны лежать «приобретаемые из природы», а не произвольные понятия. Будучи убежденным противником учения И. Канта о врожденности наших представлений о пространстве, Лобачевский постоянно подчёркивал, что математические абстракции рождаются в нас не по произволу человеческой мысли, а в результате нашего взаимоотношения с материальным миром. Критерием истины для него служил опыт, практика. Как утверждал Лобачевский, для него цель научного знания состояла не в развитии оторванных от жизни понятий, а в изучении реального мира. Признавая огромную роль гипотез для развития науки, он требовал при их выборе руководствоваться практикой, позволяющей останавливаться на тех гипотезах, которые вернее отражают соотношения, наблюдаемые в действительности, и, следовательно, находятся в тесной связи с практическими приложениями.

Вопреки всем этим высказываниям дальнейшее развитие идей Лобачевского привело к тому, что в математике всё чаще стали появляться искусственные математические конструкции, связь которых с практикой усматривалась далеко не сразу и не просто. Следует заметить, что и само построение неевклидовой геометрии в своих истоках было вызвано не столько запросами практики, сколько желанием решить логическую задачу.

Лобачевский был не только гениальным геометром. У него есть ценные работы по анализу, и он дал общее определение функциональной зависимости, позже введенное в науку Дирихле. В алгебре известен его метод приближенного вычисления корней уравнений любой степени. В своих глубоких высказываниях о соотношении геометрии и физики, об опытных корнях геометрии он предвосхитил идеи науки двадцатого столетия.

Я. Больяй. Янош Больяй (1802–1860) – венгерский математик, сын учителя математики в провинциальном венгерском городе. Его отец, Фаркаш Больяй, учился в Геттингенском университете в те же годы, что и Гаусс. Он и Гаусс изредка обменивались письмами. Фаркаш затратил много времени па

попытки доказать пятый постулат Евклида, но не пришел ни к каким определенным выводам. Его сын унаследовал его страсть и будучи студентом Военно-инженерной академии в Вене, стал заниматься доказательством постулата о параллельных линиях. Узнав об этом, Фаркаш в одном из писем к сыну, датированным 1820 г., писал: «Ты должен отвергнуть это подобно самой гнусной связи, это может лишить тебя всего твоего досуга, здоровья, покоя, всех радостей жизни. Эта чёрная пропасть в состоянии, быть может, поглотить тысячу таких титанов, как Ньютон, на земле это никогда не прояснится...». Несмотря на просьбы отца, Янош продолжал заниматься проблемой пятого постулата. Рассматривая постулат Евклида как независимую аксиому, он открыл, что можно построить геометрию, основанную на другой аксиоме, согласно которой через точку на плоскости можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих данную прямую плоскости. Это была та самая идея, которую ранее его реализовал Лобачевский.

По окончании академии Янош продолжал усиленно работать в том же направлении. Обработав свои исследования, он издал их в 1832 г. в виде приложения («Аппендикс») к первому тому сочинения своего отца под названием «Приложение, излагающее абсолютно верное учение о пространстве». Изложение «Аппендикса» отличается крайней сжатостью и схематичностью, но по продуманности каждого слова и обозначения «Аппендикс» принадлежит к числу наиболее совершенных произведений математической литературы. Озабоченный отец написал Гауссу, прося совета относительно неортодоксальных взглядов сына. Полученный из Геттингена ответ содержал восторженное одобрение работы младшего Больяй. Вдобавок к этому Гаусс заметил, что он не может хвалить Яноша, так как это было бы самопохвалой, поскольку идеи «Приложения» являются его мыслями уже многие годы. Молодой Янош был глубоко разочарован этим одобрительным письмом, которое возводило его в ранг большого ученого, но лишало приоритета. Его разочарование усилилось, когда в дальнейшем он не встретил признания. Еще более он был потрясен, когда книга Лобачевского была опубликована на немецком языке (1840), и он больше никогда ничего не напечатал по математике.

В отличие от Больяй, Лобачевский до конца боролся за признание своих идей и продолжал развивать свою новую геометрию, сочетая это с деятельностью и в других областях.

Лекция 17. Математика второй половины XIX века

План лекции:

1. Общая характеристика математики второй половины XIX века.
2. Б. Риман и его математическое творчество.
3. Аналитико-алгебраические исследования. Арифметизация математического анализа (Вейерштрасс, Кронекер, Дедекинд, Кантор).
4. Французская математическая школа (Лиувилль, Эрмит, Дарбу).
5. Возрождение английской математической школы (Грин, Гамильтон, Кэли, Сильвестр).
6. Российская математическая школа (Остроградский, Чебышев, Ковалевская).
7. Математика последней четверти XIX века. Объединяющие идеи (Клейн, Ли, Пуанкаре).
8. Математика на рубеже XIX и XX веков. Двадцать три проблемы Д. Гильберта.

1. Общая характеристика математики второй половины XIX века. Отличительной чертой математики второй половины XIX века является преднамеренное и сознательное расширение круга изучаемых математикой количественных отношений и пространственных форм и изучение их с достаточно общей точки зрения, т.е. то, что характеризует период так называемой современной математики. Первые примеры подобной расширительной трактовки математических понятий можно наблюдать уже в первой половине XIX века, однако отчетливое выражение эта тенденция получила во второй половине этого века и особенно в XX веке. Как уже отмечалось в предыдущей лекции, принципиальную роль в этом процессе сыграло создание Лобачевским неевклидовой геометрии. Хотя создана она была в двадцатых годах девятнадцатого столетия, однако полное её признание со всеми вытекающими из этого последствиями пришло только в начале семидесятых годов. В этот период бурного развития новых областей проективной и алгебраической геометрии зарождение совершенно нового вида геометрии, изложенной к тому же в немногих и трудных работах, осталось большинством математиков незамеченным. Тем же, кому это открытие становилось известным, трудно было смириться с мыслью, что искусственно построенная геометрическая система, полученная заменой одного постулата другим, ему противоположным, может иметь практическое значение. Только после работ Римана, Бельтрами и Клейна математики в достаточной мере прониклись новыми идеями и стали их использовать в своей математической деятельности. С этого времени, открывшего новый период в развитии математики, всё чаще и

смелее стали использоваться искусственно построенные математические конструкции. С этих пор элементарная и проективная геометрии стали рассматриваться, главным образом, под углом зрения их логических и аксиоматических основ. Основными отделами геометрии, где сосредоточились наиболее значительные научные силы, стали: дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия и риманова геометрия.

В этот период с большой интенсивностью продолжали развиваться все созданные в двух предшествующих веках разделы математического анализа. Чрезвычайно расширился и круг их применения к задачам, выдвигаемым естествознанием и техникой. Под влиянием не только непосредственных запросов естествознания и техники, но также внутренних потребностей самой математики возникли большие новые теории, в том числе теория функций комплексного переменного. Существенным дополнением к методам дифференциальных уравнений при изучении природы и решении технических задач стали методы теории вероятностей. Если в начале XIX века главными потребителями этих методов были теория артиллерийской стрельбы и теория ошибок, то к концу XIX и в начале XX веков теория вероятностей получила много новых применений благодаря созданию теории случайных процессов и развитию аппарата математической статистики.

Чрезвычайное расширение предмета математики заставило ученых обратиться к вопросам её обоснования. Глубокий и тщательный анализ требований к логической строгости доказательств, строению математической теории, вопросы алгоритмической разрешимости и неразрешимости математических проблем стали содержанием математической логики.

Центр тяжести алгебраических исследований в этот период переносится в новые области алгебры: теорию групп, колец, полей, общих алгебраических систем. На границе между алгеброй и геометрией возникает теория непрерывных групп, методы которой позднее стали проникать в новые области математики и естествознания. Теория чисел, представлявшая собрание отдельных результатов и идей, с XIX века развивалась в различных направлениях как стройная теория. Возникли и стали бурно развиваться алгебраическая и аналитическая теории чисел.

2. Б. Риман и его математическое творчество. Риман Бернхард (1826–1866) – немецкий математик, сын деревенского священника. В 1846 году поступил в Гёттингенский университет, слушал лекции Гаусса, многие идеи которого были им развиты позже. В 1847–1849 годах слушал лекции Якоби по механике и Дирихле по теории чисел в Берлинском университете. В 1849 году вернулся в Гёттинген, где сблизился с сотрудником Гаусса физиком В. Вебером, который пробудил в нём глубокий интерес к вопросам математического естествознания. В 1851 году защитил докторскую диссертацию «Основы общей теории функций одной комплексной переменной». В 1857 году –

профессор Гёттингенского университета. Лекции Римана легли в основу ряда курсов (математической физики, теории тяготения, электричества и магнетизма, эллиптических функций), изданных после смерти Римана его учениками. Болезненный, как и Абель, он провел последние месяцы жизни в Италии, где умер в 1866 г. в сорокалетнем возрасте от туберкулёза. За свою короткую жизнь он опубликовал сравнительно небольшое число работ, но каждая из них была и остается важной, а некоторые из них раскрыли совершенно новые и плодотворные области и оказали большое влияние на развитие математики девятнадцатого и двадцатого веков.

В докторской диссертации Риман положил начало геометрическому направлению теории аналитических функций; им введены так называемые римановы поверхности, важные при исследовании многозначных функций, разработана теория конформных отображений и даны в связи с этим основные идеи топологии, изучены условия существования аналитических функций внутри областей различного вида и т.д. Разработанные Риманом методы получили широкое применение в его дальнейших трудах по теории алгебраических функций и интегралов, по аналитической теории дифференциальных уравнений. Те же методы применены Риманом в аналитической теории чисел (например, указана связь распределения простых чисел со свойствами дзета-функции, в частности, с распределением её нулей в комплексной области).

В 1854 г. Риман при вступлении в должность приват-доцента представил сразу две фундаментальные работы: одну по тригонометрическим рядам и по основам анализа, другую – по основам геометрии. В первой из этих работ, рассматривая условия разложимости функции в ряд Фурье, Риман расширил введённое Коши понятие определенного интеграла. Если Коши применял своё определение интеграла только к непрерывным функциям, то Риман предложил называть интегралом предел интегральной суммы при его существовании и в тех случаях, когда функция не являлась непрерывной на отрезке интегрирования. Функции, для которых такой предел существовал, Риман назвал интегрируемыми. Он же исследовал условия применимости таких определений. Пользуясь введёнными им понятиями, Риман сформулировал условия разложимости функции в ряд Фурье. Исследуя функции, определяемые рядами Фурье, Риман показал, что они могут иметь бесконечное число максимумов или минимумов, что противоречило традиционному, восходящему к Эйлеру, представлению о функции.

Во второй работе 1854 года рассматривались гипотезы, на которых основана геометрия. Вводя общее понятие геометрического пространства, Риман прибег к методу, который он использовал, определяя комплексную функцию по её локальному поведению. В соответствии с этим методом пространство вводилось им как топологическое многообразие произвольного

числа измерений, метрика в окрестности каждой точки которого определялась с помощью квадратичной дифференциальной формы. В соответствии с этим определением римановo пространство – это пространство, в малых областях которого (с точностью до малых величин) реализуется евклидова геометрия, хотя в целом это пространство может не быть евклидовым. Простейшими римановыми пространствами являются евклидово пространство и примыкающие к нему два других пространства постоянной кривизны, в которых имеет место геометрия Лобачевского и геометрия Римана.

В основе римановой геометрии лежали три идеи. Первая идея – признание того, что возможны геометрии, не являющиеся евклидовыми. Вторая – это идущее от Гаусса понятие внутренней геометрии поверхностей и её аналитический аппарат в виде квадратичной формы, определяющий линейный элемент поверхности. Третья идея – это понятие об n-мерном пространстве, введённое в первой половине XIX-го века. Риман, соединив и обобщив эти идеи, ввёл, во-первых, общее понятие о пространстве как о непрерывной совокупности любого рода однотипных объектов, которые служат точками этого пространства. Во-вторых, Риман перенёс на эти абстрактные пространства представление об измерении длин бесконечно малыми шагами. Кроме того, Риман наметил возможные связи построенной им геометрии со свойствами реального пространства. Риман опубликовал эту статью без какой-либо формульной техники, что затруднило понимание его мыслей. Позже некоторые формулы были приведены в премированной работе о распределении теплоты в твёрдом анизотропном теле, которую Риман представил в Парижскую академию (186l).

3. Аналитико-алгебраические исследования. Арифметизация математического анализа. К числу математиков, чья творческая деятельность протекала в основном во второй половине XIX века и была в значительной степени посвящена математическому анализу, следует, прежде всего, отнести Вейерштрасса, Кронекера, Дедекинда и Кантора. Работы этих математиков объединяет общее стремление к логическому обоснованию анализа, сведению его принципов к простейшим арифметическим понятиям, которые теперь называют арифметизацией математики.

К. Вейерштрасс. Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897) – немецкий математик, изучал юридические науки в Бонне и математику в Мюнстре. В течение многих лет был учителем одной из прусских гимназий, за время работы в которой написал несколько статей о гиперэллиптических интегралах, абелевых функциях и алгебраических дифференциальных уравнениях. В 1856 г. стал профессором математики Берлинского университета, где преподавал в течение тридцати лет. Исследования Вейерштрасса посвящены математическому анализу, теории функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре. Вейерштрасс разра-

ботал систему логического обоснования математического анализа на основе построенной им теории действительных чисел. Он систематически использовал (аксиома Вейерштрасса) понятия верхней и нижней грани и предельной точки числовых множеств, дал строгое доказательство основных свойств функций, непрерывных на отрезке, и ввёл во всеобщее употребление понятие и признак равномерной сходимости функционального ряда. Вейерштрасс построил пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке, доказал возможность сколь угодно точного приближения многочленами произвольной функции, непрерывной на отрезке.

Центральное место в работах Вейерштрасса занимает теория аналитических функций, в основу которой он положил степенные ряды. В некотором смысле это было возвращением к Лагранжу, с тем отличием, что Вейерштрасс оперировал в комплексной плоскости и вполне строго. Значения степенного ряда внутри его круга сходимости представляют «элемент функции», а затем, при возможности, осуществляется расширение с помощью так называемого аналитического продолжения. Вейерштрасс особо изучал целые функции и функции, определённые бесконечными произведениями. Помимо исследования поведения аналитической функции в окрестности изолированной особой точки, построения теории аналитического продолжения, Вейерштрассу принадлежат: теорема об аналитичности суммы равномерно сходящегося ряда аналитических функций, разложение целых функций в бесконечные произведения, основы теории функций многих переменных, новое построение теории эллиптической функции и работы по теории алгебраических функций и абелевых интегралов. Занимаясь эллиптическими функциями, Вейерштрасс пришёл к своим функциям $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ и $\wp(z)$, по-видимому, ещё в 40-х годах XIX века (аналогичные функции встречаются в работах Эйзенштейна (1847) и других учёных). Краткое изложение теории эллиптических функций в обозначениях Вейерштрасса было опубликовано Г. Шварцем (1883–1884). Необходимо также отметить работы Ш. Эрмита, получившего с помощью эллиптических функций решение общего алгебраического уравнения 5-й степени. К вариационному исчислению относятся: исследование достаточных условий экстремума функционала, построение вариационного исчисления для случая параметрического задания функций, изучение «разрывных» решений в задачах вариационного исчисления и др. В дифференциальной геометрии Вейерштрасс изучал геодезические линии и минимальные поверхности. В линейной алгебре Вейерштрассу принадлежит построение теории элементарных делителей.

Своей славой Вейерштрасс обязан исключительной тщательности рассуждений, «вейерштрассовой строгости», что проявилось не только в его теории функций, но и в его вариационном исчислении. С Вейерштрасса начинается то сведение принципов математического анализа к простейшим

арифметическим понятиям, которое теперь называют арифметизацией математики.

Л. Кронекер. Леопольд Кронекер **(**1823–1891**) –** немецкий математик, поселился в Берлине в 1855 году, и там, будучи человеком зажиточным, в течение многих лет преподавал в университете, не занимая формально профессорской кафедры. С 1861 г. – член Берлинской АН. В 1883 году после отставки своего учителя Э. Куммера принял его кафедру.

Основные труды по алгебре и теории чисел, где Кронекер продолжил работы Куммера по теории квадратичных форм и теории групп. Большое значение имеют его исследования по арифметической теории алгебраических величин. Кронекер был сторонником «арифметизации» математики. Опубликованные им лекции по теории чисел содержат тщательное изложение его собственных и более ранних открытий. В них отчётливо видна его уверенность в необходимости арифметизации математики, в основе которой было стремление к строгости: Кронекер полагал, что основой математики должно быть число, а основой всех чисел – натуральное число. Например, число π надо определять не обычным геометрическим путем, а в виде комбинации целых чисел, например, числовым рядом $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, или непрерывной дробью. Стремление Кронекера вложить всё математическое в рамки теории чисел показывает хорошо известное его заявление на съезде в Берлине в 1886 г.: «Целые числа сотворил господь Бог, а все прочее – дело рук человеческих». Он категорически отвергал актуальную бесконечность, допуская только такие определения математических понятий, которые не требовали выхода за пределы потенциальной бесконечности. Защищая эти взгляды, Кронекер вёл упорную борьбу с принципами теоретико-функциональной школы Вейерштрасса и теоретико-множественной школы Кантора. В то же время учение Кронекера об актуальной бесконечности резко противоречило теориям Дедекинда и Кантора.

Р. Дедекинд. Рихард Дедекинд (1831–1916) – немецкий математик, учился у Гаусса и Дирихле в Гёттингенском университете. В 1862–1912 годах – профессор Высшей технической школы в Брауншвейге. С 1880 года – член Берлинской АН, с 1910 – член Парижской АН. Основные труды – по теории алгебраических чисел. Создал ряд общих концепций, лежащих в основе современной алгебры (дедекиндово кольцо, дедекиндова решётка), в частности, ему принадлежит современное определение идеала. Дедекинд – автор одной из первых систем строгого обоснования теории действительных чисел. В двух небольших книжках – «Непрерывность и иррациональные числа» (1872) и «Что такое числа и для чего они служат» (1882) – он проделал для современной математики то, что сделал Евдокс для греческой математики. Существует большое сходство между дедекиндовым сечением, с помощью которого современные математики (исключая школу Кронекера)

определяют иррациональные числа, и античной теорией Евдокса, как она изложена в пятой книге «Начал» Евклида. Кантор и Вейерштрасс дали арифметическое определение иррационального числа, несколько отличающееся от теории Дедекинда, но основанное на сходных соображениях. Издал лекции по теории чисел, читанные Дирихле, а также (совместно с Г. Вебером) полное собрание сочинений Римана.

Г. Кантор. Георг Кантор (1845–1918) – немецкий математик. В 1867 году окончил Берлинский университет, в 1879–1913 годах – профессор университета в Галле. Кантор известен не только благодаря своей теории иррационального числа, но и благодаря теории множеств. Этой теорией Кантор создал совершенно новую область математических исследований. Публикации Кантора начались в 1870 г. и продолжались ряд лет. В 1874 году он доказал несчётность множества всех действительных чисел, установив таким образом существование неэквивалентных множеств, сформулировал (1878) общее понятие мощности множеств. В 1879–1884 годах Кантор систематически изложил принципы своего учения о бесконечности. Ввёл понятие предельной точки, производного множества; построил пример совершенного множества (канторово множество), развил одну из теорий иррациональных чисел, сформулировал одну из аксиом непрерывности (аксиома Кантора). В 1883 г. Кантор напечатал свои «Основы общего учения о многообразиях». В этих работах Кантор построил теорию трансфинитных кардинальных чисел, основанную на систематическом использовании математически актуальной бесконечности. Приписав счетному множеству низшее кардинальное число, а континууму более высокое трансфинитное число, Кантор получил возможность создать арифметику трансфинитных чисел, подобную обычной арифметике. Кантор также дал определение порядковых трансфинитных чисел, показывающих, как упорядочены бесконечные множества. Эти открытия Кантора были продолжением давних схоластических спекуляций относительно природы бесконечного, и Кантор это хорошо сознавал. Он отстаивал полное признание актуальной бесконечности у святого Августина, но сам должен был защищаться против возражений многих математиков, которые отказывались принять бесконечное иначе как процесс, выражаемый значком ∞. Главным оппонентом Кантора был Кронекер – представитель совершенно противоположного направления в том же процессе арифметизации математики. Кантор в конце концов добился полного признания тогда, когда всё более очевидным становилось огромное значение его теории для обоснования теории действительных функции и топологии, особенно после того, как А. Лебег в 1901 г. обогатил теорию множеств своей теорией меры. Но оставались логические трудности теории трансфинитных чисел, и были выявлены парадоксы, как, например, парадоксы Бурали Форти (1861–1931) и Рассела Бертран (1872–1970). Это опять привело к возникновению различных школ в об-

ласти обоснования математики. Расхождения между формалистами и интуиционистами двадцатого века были продолжением на новом уровне спора между Кантором и Кронекером. В 1897 году в возрасте 52-х лет, измученный бесконечными спорами с оппонентами, Кантор отошёл от научного творчества.

4. Французская математическая школа второй половины XIX века. Франция, лицом к лицу с огромным развитием математики в Германии, продолжала выдвигать замечательных ученых во всех областях. От сороковых до шестидесятых годов ведущим математиком Франции был Жозеф Лиувилль. Шарль Эрмит стал представителем анализа во Франции после смерти Коши в 1857 году. Работы Эрмита, равно как и работы Лиувилля, следуют традициям Гаусса и Якоби, но они родственны также направлению Римана и Вейерштрасса. Французские геометрические традиции нашли блестящее продолжение в книгах и статьях Гастона Дарбу, который, с его административным и педагогическим искусством, тонкой геометрической интуицией, мастерским владением аналитической техникой, занимал во Франции положение, в известной мере, аналогичное тому, какое Клейн занимал в Германии. Эта вторая часть девятнадцатого столетия была временем появления больших французских руководств по анализу и его применениям, которые и создавались ведущими математиками, часто издавались под названием «Курс анализа». Наиболее известными являются «Курс анализа» Камилла Жордана (1882–1887) и «Трактат по анализу» Эмиля Пикара (1891–1896), и к ним надо еще добавить «Курс математического анализа» Эдуарда Гурса (1902–1905). Величайшим французским математиком второй половины девятнадцатого века был Анри Пуанкаре, к творчеству которого мы обратимся ниже.

Ж. Лиувилль. Жозеф Лиувилль (1809–1882) – французский математик, член Парижской АН (1839), профессор Политехнической школы (1833) и Коллеж де Франс (1839) в Париже, хороший преподаватель, организатор и издатель. Основные труды Лиувилля относятся к математическому анализу. Он построил теорию эллиптических функций, рассматриваемых им как двоякопериодические функции комплексного переменного; подверг систематическому исследованию арифметическую теорию квадратичных форм от двух и более переменных. В период с 1837 по 1841 годы исследовал краевую задачу для линейных уравнений второго порядка (т.н. задачу Штурма – Лиувилля), установил фундаментальную теорему в механике об интегрировании канонических уравнений динамики. Вместе с тем Лиувилль творчески работал и совсем в иных областях, выясняя природу трансцендентных чисел. В частности он доказал, что ни e, ни e^2 не могут быть корнями квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. Это было одним из звеньев цепи доказательств, ведущих от результата Ламберта, доказавшего в 1701 г., что число π иррационально, к доказательству Эрмита, что e трансцендентно (1873), и к

окончательному результату Ф. Линдемана, ученика Вейерштрасса, что π – трансцендентное число (1882). Лиувилль и некоторые из связанных с ним математиков развивали дифференциальную геометрию кривых и поверхностей, в частности, формулы Френе - Серре появились в кругу Лиувилля.

Ш. Эрмит. Шарль Эрмит (1822–1901) – французский математик, член Парижской АН (1856), Лондонского королевского общества (1873). С 1869 года – профессор Сорбонны и Политехнической школы. После смерти Коши Эрмит стал ведущим представителем анализа во Франции. Работы Эрмита, равно как и работы Лиувилля, следуют традициям Гаусса и Якоби, но они родственны также направлению Римана и Вейерштрасса. Эллиптические функции, модулярные функции, тэта-функции, теория чисел и теория инвариантов были предметом его работ, о чём свидетельствуют термины «эрмитовы числа», «эрмитовы формы», «многочлены Эрмита». Ряд работ Эрмита посвящён теории алгебраических форм и их инвариантов (эрмитова форма). В 1873 году он доказал трансцендентность чисел *e*.

Ж. Дарбу. Жан Гастон Дарбу (1842–1917) – французский математик, член Парижской АН (1884), член Лондонского королевского общества (1902). С 1873 года – профессор Парижского университета. Дарбу был геометром в духе Монжа: он подходил к геометрическим задачам, полностью владея теорией групп и теорией дифференциальных уравнений, а проблемы механики он исследовал, опираясь на живую пространственную интуицию.

Основные труды по дифференциальной геометрии (теория поверхностей, теория криволинейных координат) – «Лекции по общей теории поверхностей» и «Лекции об ортогональных системах и криволинейных координатах». Геометрические исследования привели Дарбу к рассмотрению различных вопросов интегрирования дифференциальных уравнений. Из работ, относящихся к другим областям математики, важны мемуары по теории интегрирования (суммы Дарбу), теории аналитических функций, а также исследования по вопросу о разложении функций по ортогональным функциям, в частности, полиномам Якоби. В механике плодотворно занимался вопросами кинематики, равновесия, малых колебаний системы точек и др.

5. Возрождение английской математической школы. Как уже отмечалось в предыдущей лекции, английская математическая школа во второй половине XVIII и начале XIX века находилась в затяжном кризисе, вызванном непрекращающимся спором о приоритете. Дело дошло до того, что в течение нескольких первых десятилетий девятнадцатого века деканы Кембриджа и Оксфорда рассматривали любую попытку усовершенствовать теорию флюксий как нечестивый бунт против священной тени Ньютона. Только одиночки, вроде Грина и Гамильтона, самостоятельно изучившие лейбницевский вариант анализа, смогли успешно сотрудничать со своими коллегами на континенте. Только в середине XIX века математики и физики, пользовав-

шиеся английским языком, начали, наконец, выходить на один уровень со своими коллегами на континенте. Особую роль в этом процессе сыграли физики Стокс (1819–1903), Релей (1842–1919), Томсон (1824–1907), Максвелл (1831–1879), Гиббс (1839–1903) и многие другие, разрабатывавшие проблемы математической физики. Эти ученые столько сделали для решения уравнений в частных производных, что одно время математическая физика и теория линейных уравнении в частных производных второго порядка казались тождественными. Впрочем, математическая физика внесла плодотворные идеи и в другие области математики, такие, например, как теория вероятностей, теория функций комплексного переменного и геометрия. Особое значение имел «Трактат по электричеству и магнетизму» (1873) Джемса Кларка Максвелла, где дано систематическое математическое изложение теории электромагнетизма, основанное на опытах Фарадея. Теория Максвелла стала господствующей математической теорией электричества, а позже она вдохновляла Лоренца в его теории электрона и Эйнштейна в теории относительности.

В области чистой математики интересы английских математиков сосредоточились, прежде всего, в области алгебры с применениями преимущественно к геометрии, а ведущими математиками в этой области были Кэли (1821–1895) и Сильвестр (1814–1897). В течение ряда десятилетий чистая математика в странах английского языка сохраняла явный уклон в формальную алгебру, это повлияло на творчество Бенджамина Пирса из Гарвардского университета. Ему принадлежат выдающиеся работы и в небесной механике. В 1872 г. он опубликовал свои «Линейные ассоциативные алгебры» – одно из первых систематических исследований по гиперкомплексным числам. Этот формалистский уклон в английской математике, быть может, объясняет появление такого исследования, как «Законы мысли» (1854) Джорджа Буля, работавшего в одном из дублинских колледжей. Здесь было показано, что законы формальной логики, кодифицированные Аристотелем и в течение столетий изучавшиеся в университетах, сами могут быть предметом исчисления. Тут заложены принципы, соответствующие идее Лейбница о «всеобщей характеристике». Эта «алгебра логики» – начало того направления, которое стремилось объединить логику и математику. Книга Готтлиба Фреге «Основы арифметики» (1884) дала импульс этому направлению, так как там арифметические понятия выводятся из логики. Высшей точкой этих исследовании в двадцатом столетии были «Основы математики» Бертрана Рассела (1872–1970) и Альфреда Уайтхеда (1861–1947), которые повлияли на позднейшие работы Гильберта по основам арифметики и по устранению парадоксов бесконечного.

Д. Грин. Джордж Грин (1793–1841) – английский математик и физик. Сын мельника. Самостоятельно изучал математику и лишь в 1837 году окон-

чил Кембриджский университет. В сочинении «Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма» (1828) ввёл понятие и термин «потенциал» и развил теорию электричества и магнетизма, опираясь на найденное им соотношение между интегралом по объёму и интегралом по поверхности, ограничивающей объём (формулы Грина). Труд оставался неизвестным до его переиздания (1845). Это стало началом современной математической физики в Англии, и вместе с работой Гаусса 1839 г. дало теории потенциала положение независимой ветви математики. Гаусс не знал работы Грина, которая стала более широко известна лишь тогда, когда ее переиздал Вильям Томсон (впоследствии лорд Кельвин). Но Гаусс и Грин оказались настолько близки, что тогда как Грин выбрал термин «потенциальная функция», Гаусс выбрал почти такой же термин – «потенциал» для обозначения решения уравнения Лапласа. Два тесно связанных тождества между интегралами по поверхности и криволинейными носят название формулы Грина и формулы Гаусса.

В. Гамильтон. Гамильтон Вильям Роуэн (1805–1865) – ирландский математик, родился в Дублине, в котором провел всю свою жизнь. Мальчиком изучал континентальную математику по работам Клеро и Лапласа, что было ещё новым в Великобритании, и в своих исключительно оригинальных исследованиях по оптике и динамике показал, что он овладел новыми методами. Учился в «Тринити колледж» (колледж троицы). С 1827 года, двадцати одного года от роду, стал профессором астрономии в Дублинском университете и директором университетской обсерватории.

В механике Гамильтон сделал оптику и динамику двумя видами применения вариационного исчисления, применив т.н. принцип наименьшего действия. Завершив свои работы по механике и оптике, Гамильтон в 1835 г. обратился к алгебре. В его «Теории алгебраических пар» (1835) дано строгое построение алгебры комплексных чисел на основе представления комплексного числа как пары чисел. Это, вероятно, сделано независимо от Гаусса, который в своей теории биквадратичных вычетов (1831) также дал строгое построение алгебры комплексных чисел, но на основе геометрии комплексной плоскости. Впоследствии Гамильтон пытался проникнуть в алгебру числовых троек, числовых четверок и т. д. Продвигаясь по этому пути, Гамильтон построил своеобразную систему чисел, т.н. кватернионов, изучению которых он посвятил остальную часть своей жизни. Это учение было одним из источников развития векторного исчисления, само название которого принадлежит. Гамильтону.

А. Кэли (Кейли) и Д. Сильвестр. Артур Кэли (1824–1895) **–** английский математик. В молодости посвятил себя изучению права и практической деятельности юриста. Потом увлекся математикой. В 1863 г. Кэли принял предложение занять новую математическую кафедру в Кембридже, где он

преподавал в течение тридцати лет. В сороковых годах, когда Кэли работал юристом в Лондоне, он познакомился с Сильвестром, в то время работником по страхованию. **Джеймс Джозеф Сильвестр** (1814–1897)**,** бывший на 10 лет старше Кэли, был не только математиком, но и поэтом, остряком и, наряду с Лейбницем, наиболее выдающимся создателем новых терминов за всю историю математики. Сильвестр с 1855 до 1869 гг. преподавал в военной академии в Вулвиче. Он дважды был в Америке: в первый раз в качестве профессора университета в Виргинии (1841–1842), второй раз как профессор университета в Балтиморе (1877–1883). Во время второго пребывания в США он влился в число тех, кто заложил основы научной работы в области математики в американских университетах. Преподавательская деятельность Сильвестра была началом расцвета математики в Соединенных Штатах.

Ранние работы Кэли относились к теории определителей, где он в 1841 году ввёл общепринятое ныне обозначение для определителя, дифференциальных уравнений, эллиптических функций. В сороковые годы у Кэли и Сильвестра зародился общий интерес к алгебре форм или «квантик», как их называл Кэли. Сотрудничество Кэли и Сильвестра означало зарождение теории алгебраических инвариантов. Эта теория как бы носилась в воздухе уже многие годы, особенно после того, как стали изучать определители. Ранние работы Кэли и Сильвестра обходятся без определителей – это сознательная попытка дать систематическую теорию инвариантов алгебраических форм со своей собственной символикой и своими правилами операций. Многочисленные работы Кэли посвящены самым разнообразным вопросам в области конечных групп, алгебраических кривых, определителей и инвариантов алгебраических квадратичных форм. Исследования инвариантов проективных преобразований легли в основу истолкования геометрии Лобачевского (интерпретация Кэли – Клейна). Занимался Кэли также сферической астрономией и астрофизикой. Наиболее известные его работы – девять «Мемуаров о квантиках» (1854–1878). Шестая работа в этой серии (1859) содержит проективное определение метрики относительно конического сечения. Это открытие привело Кэли к проективному определению евклидовой метрики, и таким путем он получил возможность ввести метрическую геометрию в систему проективной геометрии. Связь этой проективной метрики с неевклидовой геометрией ускользнула от внимания Кэли и была открыта позже Феликсом Клейном.

6. Российская математическая школа. Первая математическая школа европейского уровня в России сложилась в Петербурге в середине XIX века. У ее истоков стояли академики Остроградский (1801–1861) и Буняковский (1804–1889). Оба будущих академика свои юношеские годы провели в Париже, совершенствуя полученное на родине математическое образование. После возвращения в Россию в начале тридцатых годов оба сделались горячими

пропагандистами идей французской математической школы, продолжая работать в том же направлении и побуждая к этому других. Остроградский занимался в основном проблемами математической физики и механики, Буняковский – проблемами теории вероятностей и ее приложений к статистике народонаселения. Многочисленные ученики Остроградского в области математики и механики и Буняковского – в области математики значительно подняли уровень преподавания математики и механики в высших учебных заведениях России. Значительное расширение интересов петербургских математиков связано с именем Пафнутия Львовича Чебышева. Его многочисленные научные труды почти во всех областях математики и прикладной механике, труды глубокие по содержанию и яркие по своеобразию методов исследования, создали ему славу одного из крупнейших представителей математической мысли. Чебышев был доступен для всех, кто имел интерес и способности к исследовательской деятельности в области математики, и щедро делился с ними своими идеями. Благодаря этому он оставил после себя большое число учеников, ставших впоследствии первоклассными учеными; среди них А.М. Ляпунов, А.А. Марков. От него идут истоки многих российских математических школ – теории вероятностей, теории чисел, теории приближения функций. Говоря о формировании российской математической школы, нельзя не упомянуть и о Софье Ковалевской – первой в мире женщине – профессоре математики и члене АН.

М. В. Остроградский. Михаил Васильевич Остроградский – русский математик, академик Петербургской АН (1830). Один из основателей Петербургской математической школы. Учился в Харьковском университете, а затем с 1822 по 1828 гг. в Париже слушал лекции О. Коши, П. Лапласа и Ж. Фурье. По возвращении на родину работал профессором различных технических и военных вузов Петербурга. Некоторое время, с 1832 по 1840 гг. – профессор Главного педагогического университета. Основные труды Остроградского относятся к математической физике и теоретической механике. В математическом анализе развил теорию вычетов Коши, обобщил метод разделения переменных Ж. Фурье, вывел формулу преобразования тройного интеграла по объёму в двойной интеграл по поверхности, которую через 6 лет обобщил на случай n–кратного интеграла. В теории интегрирования рациональных функций Остроградским разработано правило выделения рациональной части интеграла. Важные результаты были получены Остроградским в теории дифференциальных уравнений, приближённом анализе. Вслед за Н. Абелем и одновременно с Ж. Лиувиллем Остроградский занимался также теорией интегрирования иррациональных алгебраических функций, в чём за ним последовал П.Л. Чебышев. Известен Остроградский работами по теории чисел, алгебре, теории вероятностей. Ему принадлежит ряд популярных ста-

тей, педагогических исследований, а также превосходных для своего времени учебников.

П. Л. Чебышев. Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894) – русский математик и механик, дворянин. Первоначальное образование получил дома. Шестнадцати лет поступил в Московский университет, который окончил в 1841 году. В 1847 году переехал в Петербург, где в 1849 году защитил докторскую диссертацию «Теория сравнений» и в 1850 году стал профессором Петербургского университета. Член и многих других русских и иностранных научных обществ, университетов и академий. В 1882 году прекратил чтение лекций и, выйдя в отставку, целиком отдался научной работе, продолжавшейся до последних дней его жизни. Исследования Чебышева относятся к теории приближений функций многочленами, интегральному исчислению, теории чисел, теории вероятностей, теории механизмов и многим другим областям математики и смежных областей знания. В теории вероятностей Чебышеву принадлежит заслуга создания нового приёма доказательства предельных теорем – т.н. метода моментов. Им был доказан закон больших чисел в весьма общей форме; при этом его доказательство поражает своей простотой и элементарностью. Работы Чебышева по теории вероятностей составляют важный этап в её развитии; кроме того, они явились базой, на которой выросла русская школа теории вероятностей, вначале состоявшая из непосредственных учеников Чебышева. В теории чисел Чебышев впервые доказал, что функция $\pi(x)$ – число простых чисел, не превосходящих x, удовлетворяет неравенствам $a\dfrac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\dfrac{x}{\ln x}$, где $a<1$ и $b>1$ – вычисленные Чебышевым постоянные $(a = 0{,}921, b = 1{,}06)$. Исследование расположения простых чисел привело Чебышева также к исследованию квадратичных форм с положительными определителями. Наиболее многочисленны работы Чебышева в области математического анализа. В частности, он исследовал интегрируемость некоторых иррациональных выражений в алгебраических функциях и логарифмах. В одном из сочинений в качестве следствия общих результатов была получена известная его теорема об условиях интегрируемости в элементарных функциях дифференциального бинома. Вторым большим направлением исследований Чебышева по математическому анализу явились его работы по построению общей теории ортогональных многочленов. К этому кругу идей примыкают исследования Чебышева по проблеме моментов и по квадратурным формулам. Чебышев является основоположником т.н. конструктивной теории функций, основным составляющим элементом которой является теория наилучшего приближения функций. Теория машин и механизмов была одной из тех дисциплин, которыми Чебышев систематически интересовался всю жизнь. Стремление усовершенствовать неко-

торые из сконструированных им механизмов натолкнуло Чебышева на постановку задачи о наилучшем приближении функций.

С. В. Ковалевская. Софья Васильевна Ковалевская (1850–1891) – русский математик. С 1886 г. в Петербурге брала уроки высшей математики у известного педагога А.Н. Страннолюбского. Так как в те годы в России, как и в большинстве других стран, доступ женщинам в университеты был закрыт, Ковалевская, чтобы иметь возможность заняться наукой, вступила в фиктивный брак (ставший позднее фактическим) с В.О. Ковалевским и в 1869 г. уехала в Гейдельберг, где изучала математику и посещала лекции Г. Кирхгофа, Э. Дюбуа–Реймонда и Г. Гельмгольца. В 1870 г. Ковалевская переехала в Берлин, где 4 года занималась под руководством К. Вейерштрасса, согласившегося давать ей частные уроки (в Берлинский университет женщины также не допускались). Основной математический результат, полученный Ковалевской – теорема о существовании решений нормальной системы уравнений с частными производными (теорема Коши – Ковалевской), – содержится в работе «К теории дифференциальных уравнений с частными производными» (1870). За эту и две другие работы, представленные в 1874 г. Вейерштрассом Гёттингенскому университету, ей заочно присвоили степень доктора философии с высшей похвалой. Несмотря на признание научных успехов, получить преподавательскую работу в высших учебных заведениях России, Германии, Франции ей не удалось. Только в 1882 году ей пришло приглашение занять должность приват-доцента Стокгольмского университета. Получив приглашение, Ковалевская в 1883 г. выехала в Швецию, где в 1884 г. была назначена профессором Стокгольмского университета. В 1888 г. Парижская АН за работу «Задача о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки» присудила Ковалевской премию Бордена, удвоенную ввиду большой ценности этой работы. В следующем году за вторую работу о вращении твёрдого тела Ковалевской была присуждена премия Шведской королевской АН. Во время пребывания Ковалевской в Швеции в России был в принципе решён вопрос о допущении женщин к избранию в член - корреспонденты. В соответствии с этим решением по представлении академиков П.Л. Чебышева, В.Г. Имшенецкого и В.Я. Буняковского в 1889 г. Ковалевская была избрана чл.-корр. Петербургской АН.

7. Математика последней четверти XIX века. Объединяющие идеи. К середине семидесятых годов XIX века математика разрослась в огромное и хаотичное здание, состоявшее из большого числа частей, дорогу в котором могли найти только специалисты. Даже большие математики – Эрмит, Вейерштрасс, Кэли, Бельтрами – могли продуктивно работать лишь в немногих ее областях. Эта специализация все время росла, и к XX веку она достигла огромных размеров. Но никогда не прекращалось противодействие ей, и некоторые из самых важных достижений за последние сто лет явились резуль-

татом синтеза различных областей математики. В восемнадцатом столетии такой синтез был осуществлен в трудах Лагранжа и Лапласа по механике. Эти труды оставались основой для очень значительных работ различного характера. Девятнадцатое столетие добавило к этому новые объединяющие принципы, а именно теорию групп и риманово понятие функции и пространства. Значение этого лучше всего можно понять по трудам Клейна, Ли и Пуанкаре.

Ф. Клейн. Кристиан Феликс Клейн (1849–1922) – немецкий математик. В 1865 г. поступил в Берлинский университет, где через три года защитил докторскую диссертацию по философии, был ассистентом Плюккера в Бонне в конце шестидесятых гидов, и там он изучил геометрию. В 1870 г., когда ему было двадцать два года, Клейн побывал в Париже, где встретился с Софусом Ли, норвежцем, который был на шесть лет старше его, но заинтересовался математикой лишь незадолго до их встречи. Молодые люди встречались с французскими математиками и изучали их труды. Как раз в 1870 г. Жордан написал книгу о группах подстановок и о теории уравнений Галуа. Клейн и Ли начали сознавать основное значение теории групп и в последующем разбили математику примерно на две части: Клейн в основном сосредоточился на дискретных, а Ли – на непрерывных группах.

В 1872 г. при замещении должности профессора эрлангенского университета Клейн прочел вступительную лекцию «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», в которой он разъяснял важность понятия группы для классификации различных областей математики. В этой лекции, которая стала известна под именем «Эрлангенской программы», любая геометрия объявлялась теорией инвариантов особой группы преобразований. Расширяя или сужая группу, можно перейти от одного типа геометрии к другому. В частности, геометрия Евклида изучает инварианты метрической группы, проективная геометрия – инварианты проективной группы. Классификация групп преобразований давала классификацию геометрий, а теория алгебраических и дифференциальных инвариантов каждой группы – аналитическую структуру соответствующей геометрии. За год до этого Клейн дал важный пример применения своего подхода, показав, что неевклидовы геометрии представляют собой проективные геометрии с метрикой Кэли, что явилось еще одним подтверждением значимости геометрии Лобачевского – Больяй. Позже эта идея отображения одной области математики на другую часто использовалась и сыграла важную роль в гильбертовой аксиоматике геометрии. С 1875 года Клейн преподавал в Мюнхенской высшей технической школе, а с 1880 года – в Лейпцигском университете. Наконец, в 1886 году он переехал в Гёттинген, где оставался до конца жизни.

В своих работах Клейн стремился раскрыть внутреннюю связь между отдельными ветвями математики и между математикой, с одной стороны,

физикой и техникой – с другой. Его геометрические идеи сделали возможным синтез геометрических и алгебраических трудов Монжа, Понселе, Гаусса, Кэли, Клебша, Грассмана и Римана. В обширных исследованиях, принадлежащих Клейну и его многочисленным ученикам, понятие группы было применено к линейным дифференциальным уравнениям, к эллиптическим модулярным функциям, к абелевым и новым «автоморфным» функциям.

Большой труд был вложен Клейном в создание «Энциклопедии математических наук». В течение почти 40 лет (с 1876) Клейн был главным редактором журнала «Mathematische Annallen». Много занимался вопросами математического образования; перед первой мировой войной организовал международную комиссию по реорганизации преподавания математики.

С. Ли. Мариус Софус Ли (1842–1899), – норвежский математик. После знакомства с Клейном, находясь еще в Париже, Софус Ли открыл контактные преобразования и тем самым ключ ко всей гамильтоновой динамике как части теории групп. После своего возвращения в Норвегию стал профессором в Кристиании (Осло), позже, с 1886 по 1898 гг., Ли преподавал в Лейпциге. Его первые работы относились к чисто геометрическим вопросам. Однако уже в 1872 году Ли обратился к теории дифференциальных уравнений, ввёл в неё понятия и методы n–мерной геометрии. Теория групп Ли, возникшая из стремления внести объединяющее начало и установить общие точки зрения в самых разнообразных отделах математики, оказала глубокое влияние на дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений, алгебры, оснований геометрии, топологии и теоретической физики. В результате работ Ли (и Клейна) геометрия была перестроена на основе теоретико–групповых преобразований. Позже к трудам Ли многое было добавлено в работах французского математика Эли Картана.

А. Пуанкаре. Жюль Анри Пуанкаре (1864–1912)**,** французский математик второй половины девятнадцатого века, профессор Сорбонны с 1881 г. до своей смерти. Никто из математиков этого периода не владел таким количеством дисциплин и не был в состоянии их все обогатить. Каждый год он читал лекции по новому предмету. Эти лекции охватывали теорию потенциала, оптику, электромагнетизм, термодинамику, капиллярность, гидродинамику, небесную механику и многие области математической физики. Труды Пуанкаре в области математики, с одной стороны, завершают классическое направление, а с другой – открывают пути к развитию новой математики, где наряду с количественными соотношениями устанавливаются факты, имеющие качественный характер. Большой цикл работ Пуанкаре относится к теории дифференциальных уравнений. Он исследовал разложения решений дифференциальных уравнений по начальным условиям и малым параметрам, доказал асимптотичность некоторых рядов, выражающих решения уравнений с частными производными. После докторской диссертации, посвящённой

изучению особых точек системы дифференциальных уравнений, написал ряд мемуаров под общим названием «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (1880). В этих работах он построил качественную теорию дифференциальных уравнений, исследовал характер интегральных кривых на плоскости, дал классификацию особых точек. Пуанкаре дал приложения своих исследований к задаче о движении трёх тел. Им введены методы малого параметра, неподвижной точки, уравнений в вариациях, разработана теория интегральных инвариантов. Рассмотрение обыкновенных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами привело Пуанкаре к изучению новых классов трансцендентных функций – автоморфных функций. Эти исследования, так же как и работы по качественной теории дифференциальных уравнений, привлекли внимание Пуанкаре к топологии. Он ввёл основные понятия комбинаторной топологии, доказал формулу, связывающую число граней (любого числа измерений) n –мерного полиэдра (формулу Эйлера - Пуанкаре), дал первую интуитивную формулировку общего понятия размерности. Труды Пуанкаре существенно повлияли на наши современные представления в области космогонии, топологии, теории вероятностей, теории относительности.

Научное творчество Пуанкаре в последние десять лет его жизни протекало в атмосфере начавшейся революции в естествознании, что, несомненно, определило его интерес к философским проблемам науки, к методологии научного познания. В эти годы им был написан ряд популярных и полупопулярных книг, которые помогали понять проблемы современной математики. Среди них: «Ценность науки» (1905) и «Наука и гипотеза» (1906).

8. Математика на рубеже XIX и XX веков. Двадцать три проблемы Д. Гильберта. В 1900 г. на Международном конгрессе математиков в Париже Геттингенский профессор Давид Гильберт (1862–1943) выдвинул в качестве предмета исследования двадцать три проблемы, которые, по его мнению, должны были быть решены в XX веке. К этому времени Гильберт уже получил международное признание за свои работы, прежде всего в области теории инвариантов, теории алгебраических чисел и основаниям геометрии, особенно после публикации в 1899 году знаменитого труда «Основания геометрии».

В своем докладе 1900 г. Гильберт старался уловить направленность математических исследований предыдущих десятилетий и наметить контуры творческой деятельности в будущем. Перечисление его проблем позволит лучше понять значение математики девятнадцатого столетия.

Прежде всего, Гильберт предложил арифметически сформулировать понятие континуума, как оно дано в трудах Коши, Больцано и Кантора. Выяснить, существует ли кардинальное число между числом, соответствующим счетному множеству, и числом, соответствующим континууму, а также мож-

но ли рассматривать континуум как вполне упорядоченное множество, более того, что можно сказать относительно непротиворечивости аксиом арифметики. Следующие проблемы касаются оснований геометрии, понятия непрерывной группы преобразовании по Ли и математической трактовки аксиом физики. Затем следует несколько частных проблем, относящихся к арифметике и алгебре, так, оставалась неизвестной иррациональность или трансцендентность некоторых чисел (например, a^{β} при алгебраическом a и иррациональном β). Не были известны также доказательство гипотезы Римана относительно нулей дзета-функции и формулировка наиболее общего закона взаимности в теории чисел. Другой проблемой в этой области было доказательство конечности некоторых полных систем функций, связанных с теорией инвариантов. В пятнадцатой проблеме требовалось дать строгую формулировку исчислительной геометрии Шуберта, шестнадцатой – изучить топологию алгебраических кривых и поверхностей. Еще одна проблема относится к заполнению пространства конгруэнтными многогранниками. Остальные проблемы относятся к дифференциальным уравнениям и к вариационному исчислению.

Программа Гильберта показала жизненную силу математики конца девятнадцатого века, она находится в резком контрасте с теми пессимистическими взглядами, какие были в конце восемнадцатого столетия. Теперь некоторые из проблем Гильберта решены, другие все еще ждут окончательного решения. Развитие математики после 1900 года не обмануло надежд, возникших к исходу девятнадцатого века. Все же даже гений Гильберта не мог предвидеть некоторые из поразительных достижений, которые имели место на деле и которые осуществляются сегодня. Математика двадцатого столетия пришла к новым открытиям своим собственным, новым путем, в чем Гильберту принадлежала не последняя роль. Данное Гильбертом решение проблем Дирихле положило начало разработке так называемых прямых методов в вариационном исчислении, а построенная им теория интегральных уравнений с симметричным ядром составила одну из основ современного функционального анализа и особенно спектральной теории линейных операторов. Значителен его вклад в построение логических основ математической физики. К 1922 году у Гильберта сложился обширный план обоснования всей математики путём её полной формализации с последующим «математическим» доказательством непротиворечивости формализованной математики. Два тома «Оснований математики», написанные Гильбертом совместно с П. Бернайсом (1888–1977), в которых эта концепция подробно развивается, вышли в 1934 и 1939 годах. Первоначальные надежды Гильберта в этой области не оправдались; проблема непротиворечивости формализованных математических теорий оказалась глубже и труднее, чем Гильберт предполагал сначала. Но вся дальнейшая работа над логическими основами математики в большей

мере идёт по путям, намеченным Гильбертом, и пользуется созданными им концепциями. Считая с логической точки зрения необходимой полную формализацию математики, Гильберт в то же время верил в силу творческой математической интуиции. Для его творчества характерны уверенность в неограниченной силе человеческого разума, убеждение в единстве математической науки и единстве математики и естествознания.

Чего не смог предвидеть Гильберт, так это того, что во второй половине XX века произойдет бурное развитие вычислительной техники, которая проникнет во все области практической и теоретической деятельности людей и что ею будут пользоваться математики. Тем более не мог он предвидеть последствия такого проникновения вычислительной техники в математику. Но это уже совсем другая история.

Именной указатель

Абель Нильс Хенрик (1802–1829)
Барроу Исаак (1630–1677).
Баше де Мезириак (1581–1638).
Беркли Джордж (1685–1753).
Бернулли Даниил (1700–1782).
Бернулли Иоган (1667–1748).
Бернулли Якоб (1654–1705).
Больяй, Бойаи Янош (1802–1860)
Валлис Джон (1616–1703).
Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815–1897)
Виет Франсуа (1540–1603).
Галилей Галилео (1564–1642).
Галуа Эварист (1811–1832)
Гамильтон Вильям Роуэн (1805–1865)
Гаусс Карл Фридрих (1777–1855)
Гильберт Давид (1862–1943)
Грин Джордж (1793–1841)
Гюйгенс Христиан (1629–1695).
Даламбер Жан ле Рон (1717–1783)
Дедекинд Рихард (1831–1916)
Дезарг Жерар (1591–1661)
Декарт Рене (1596–1650)
Дирихле Петер Ложен (1805–1859)
Жордан Камилл (1838–1922)
Кавальери Бонавентура (1598–1647).
Кантор Георг (1845–1918)
Кеплер Иоганн (1571–1630).
Клейн Кристиан Феликс (1849–1922)
Клеро Алекси Клод (1713–1765)
Ковалевская Софья Васильевна (1850–1891)
Коши Огюстен Луи (1789–1857).
Кронекер Леопольд (1823–1891)
Кэли, Кейли Артур (1824 –1895)
Лагранж Жозеф Луи (1736–1813)
Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646–1716).
Ли Мариус Софус (1842–1899)
Лиувилль Жозеф (1809–1882)
Лобачевский Николай Иванович (1792–1856)
Лопиталь Гийом Франсуа Антуан (1661–1704).
Магницкий Леонтий Филиппович (1669–1739).
Маклорен Колин (1698–1746)
Мёбиус Август Фердинанд (1790–1868)
Монж Гаспар (1746–1818)

Муавр Абрахам (1667–1754)
Ньютон Исаак (1643–1727)
Паскаль Блез (1623–1662)
Пуанкаре Жюль Анри (1864–1912)
Остроградский Михаил Васильевич (1801–1861)
Плюккер Юлиус (1801–1868)
Понселе Жан Виктор (1788–1867)
Риман Бернхард (1826–1866)
Робервaль Жиль (1602–1675)
Ролль Мишель (1652–1715)
Саккери Джованни Джироламо (1667–1733)
Сильвестр Джеймс Джозеф (1814 – 1897)
Тейлор Брук (1685 – 1731)
Торричелли Эванджелиста (1608–1647)
Ферма Пьер (1601–1665)
Чебышев Пафнутий Львович (1821–1894)
Шаль Мишель (1793–1880)
Штаудт Карл Георг Кристиан (1798–1867)
Штейнер Якоб (1796–1863)
Эйлер Леонард (1707 – 1783)
Эрмит Шарль (1822–1901)
Якоби Карл Густав Якоб (1804–1851)

Библиографический список

Учебники и учебные пособия:

1. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М., 1963.

2. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. – М., 1959.

3. Бэлл Э.Т. Творцы математики: Предшественники современной математики. – М., 1979.

4. Гнеденко Б.В. Очерки по истории математики в России. – М.-Л., 1946.

5. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты (очерки по истории математики). – М., 1986.

6. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть первая. –М.-Л., 1937.

7. Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии // Сборник статей. – М., 1991.

8. Колмогоров А.Н. Математика //БСЭ. 2-е изд. – М., 1954, Т. 25., С. 464-483.

9. Математический энциклопедический словарь. Биографический словарь. –М, 1988.

10. Рыбников К.А. История математики. Том 1. – М., 1960.

11. Рыбников К.А. История математики. Том 1. – М., 1963.

12. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. – М., 1969.

13. Фрейман. Л.С. Творцы высшей математики. – М., 1968.

14. Цейтен Г.Г. История математики в 16 и 17 веках. – М., 1933.

15. Юшкевич А.П. (редактор). История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т.2. – М., 1970.

16. Юшкевич А.П. (редактор). История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т.3. – М., 1972.

17. Юшкевич А.П. История математики в России. – М., 1968.

18. Юшкевич А.П. (редактор). Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия. – М., 1976.

19. Юшкевич А.П. (редактор). Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей. – М., 1976.

20. Юшкевич А.П. История математики в средние века. – М., 1961.

Классики математической науки

1. Бернулли И. Избранные сочинения по механике. – М.-Л., 1937.

2. Борель Э. Основные идеи алгебры и анализа. – М.-Л., 1927.

3. Больаи Я. Апендикс. – М.-Л., 1950.

4. Вейль Г. О философии математики. – М.-Л., 1934.

5. Гильберт Д. Основания геометрии. – М.-Л., 1948.

6. Гюйгенс Х. О найденной величине круга. – Одесса: Матезис, 1911.

7. Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа. – Одесса, 1923.

8. Декарт Р. Геометрия с приложением избранных работ П.Ферма и переписки Р. Декарта. – М.-Л., 1938.

9. Кавальери Б. Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. С приложением " Опыта IV" о применении неделимых к алгебраическим степеням. – М.-Л., 1940.

10. Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях. – С.-Петербург, 1914.

11. Кантор Г. О различных точках зрения на актуально - бесконечное. – С.-Петербург, 1914.

12. Кантор Г. К учению о трансфинитном. – С.-Петербург, 1914.

13. Карно Л. Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. – М.-Л., 1936.

14. Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек. – М.-Л., 1935.

15. Ламберт И. Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга. – Одесса: Матезис, 1911.

16. Лейбниц Г.В. Избранные отрывки из математических сочинений // Успехи математических наук, Т.III. Вып.I. – М., 1948. – С. 165-204.

17. Листинг И. Предварительные исследования по топологии. – М.-Л., 1932.

18. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений в 5 томах. – М.-Л., 1946–1951.

19. Де Лопиталь Г.Ф. Анализ бесконечно малых. – М.-Л., 1935.

20. Ньютон И. Математические работы. – М.-Л.,1937.

21. Ньютон И. Всеобщая арифметика. – М.-Л., 1948.

22. Орем Н. Трактат о конфигурации качеств // Историко-математические исследования. Вып. XI. – Москва: изд-во «Наука», 1958. – С. 601-731.

23. Паскаль Б. Опыт о конических сечениях с приложением письма Лейбница к Э. Перье // Историко-математические исследования, Вып. XIV. – Москва: изд-во «Наука», 1961. – С. 603–622.

24. Чебышев П.Л. Полн. собр. соч. в 5-ти томах. – М.-Л.,1944–1951.

25. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Изд. 2-е. – М., 1961.

26. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. – М.-Л., 1949.

27. Эйлер Л. Интегральное исчисление. – М., 1958.

Майер Роберт Адольфович,
Майер Ромуальд Робертович

Курс истории математики
Учебное пособие
Часть 2

Редактор Н. А. Агафонова
Корректор С. А. Бовкун

Подписано в печать 05.02.06 Формат 60х84 1/16. .
Усл. печ. л. 9,0 Тираж 200 экз.
Заказ . Цена свободная

660049, г. Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Редакционно-издательский отдел КГПУ,
т. 22-12-89